§12 Logik

Die Logik soll uns in die Lage versetzen, Argumente auf ihre »formale« Gültigkeit hin zu prüfen. In klareren Worten gesagt, geht es in der formalen Logik um die Gültigkeit von Schlüssen allein aufgrund der Bedeutung der logischen Partikel. (Zum Begriff des Arguments und der Gültigkeit im Allgemeinen siehe gegebenenfalls noch einmal §9). Aufgrund des ubiquitären Auftretens von Argumenten in Lebenswelt und Wissenschaft ist die Frage des methodischen Aufbaus der formalen Logik für die Erkenntnistheorie von großer Wichtigkeit. Eine ausführlichere Behandlung des Themas wäre eigentlich allein schon von daher geboten und mehr noch auf dem Hintergrund, dass meine eigene Auffassung hier wieder einmal vom Mainstream abweicht. Gleichwohl werde ich mich (relativ) kurzfassen. Eine gründliche Behandlung des Themas würde hier nämlich eindeutig zu weit führen – ich erlaube mir daher, stattdessen auf mein Buch *On inferring. An enquiry into relevance and validity* von 2003 zu verweisen. Der Text des vorliegenden Paragrafen ist zwischenzeitlich weitestgehend auch in den Aufsatz *Eine gebrauchstheoretische Semantik formal relevanten Schlussfolgerns* eingegangen (in Georg Kamp, Felix Thiele (Hrsg.): *Erkennen und Handeln. Festschrift für Carl Friedrich Gethmann zum 65. Geburtstag*, 2009, 123-174).

Um der Kürze willen werde ich mich nur der Prädikatenlogik erster Stufe widmen, das heißt, ich werde zum einen nur *Junktoren* (»und«, »oder«, »wenn-dann«, »nicht«) und *Quantoren* (»alle«, »einige«) berücksichtigen, und zum anderen den *Bereich* der Quantoren auf Individuenvariablen einschränken. Das Quantifizieren über Eigenschaften, Eigenschaften von Eigenschaften, Propositionen usw. werde ich hingegen außen vor lassen, ebenso wie modallogische oder sonstige Erweiterungen. Wie im unmittelbar folgenden ersten Artikel deutlich werden wird, sollte jeder Versuch einer Logikbegründung klar zwischen Logik*kalkülen* und deren *Semantik* unterscheiden. Im vorliegenden Paragrafen werde ich mich allein um den methodischen Aufbau einer adäquaten Semantik für Logikkalküle kümmern, da dies letztlich die für eine philosophische Logik*begründung* entscheidende Tätigkeit darstellt.

Obwohl der weitere Zusammenhang, in welchem wir hier auf die Logik zu sprechen kommen, der *methodische Aufbau einer Sprache* ist, und zwar konkret der Aufbauschritt, welcher die Menge der elementaren Aussagen der aufzubauenden Sprache um eine Menge logisch komplexer Aussagen erweitern soll, möchte ich den Aufbau der Logik selbst aber doch unabhängig von der konkreten Modellsprache des vorigen Paragrafen vornehmen. Denn schließlich soll die formale Logik es ja ermöglichen, Argumente *beliebiger* Sprachen auf ihre (formale) Gültigkeit hin zu prüfen.

 | DOI:10.30965/9783957432025_013

(1) Formale Logik und Semantik

Damit Argumente beliebiger Sprachen der Prüfung auf formale Gültigkeit unterzogen werden können, stellen die Logiker für ihre Systeme eine eigene (»logische«) Syntax bereit. Natürlichsprachliche Aussagen werden dann im Zusammenhang logischer Untersuchungen von *Formeln* vertreten – Figuren, welche zwar die Form von Aussagen aufweisen, aber anstatt konkreter Ausdrücke (einschlägiger syntaktischer Kategorien) nur Parameter enthalten, die konkrete Ausdrücke unbestimmt andeuten. Der Einfachheit halber legen wir hier für das Folgende die Syntax zugrunde, die wir im §11 (2) zur Erläuterung des klassischen Verfahrens der Sprachkonstruktion aufgestellt hatten. Der Unterschied zur Syntax der Elementaraussagen unserer Modellsprache besteht damit nur im Wegfall der Hilfszeichen (Klammern und Kommata). Dass die Objekte solcher Systeme nicht Aussagen, sondern Formeln sind – also Figuren, die *Formen* von Aussagen repräsentieren –, liefert im Übrigen die Erklärung dafür, warum wir für die metasprachliche Rede über diese Formeln *neue* Variablen verwenden müssen – daher die Frakturtype.

Semantische Bestimmungen werden im Rahmen der Logik nur für die »logischen« Ausdrücke gegeben, also insbesondere die Junktoren und Quantoren, mit welchen elementare zu logisch komplexen Formeln zusammengesetzt werden. Auf dem Hintergrund solcher semantischer Bestimmungen erweisen sich dann gewisse Argument- bzw. Schlussformen als gültig, ganz gleich, welchen konkreten Inhalt man den Elementarformeln auch zuweist: Sofern die Prämissen (allesamt) wahr sind, weisen Schlüsse der entsprechenden Formen immer wahre Konklusionen auf. Dabei ergeben sich als Spezialfälle auch »Tautologien« bzw. »logische Wahrheiten« – wahre Aussagen, die auf gültigen Schlüssen mit der Prämissenanzahl Null beruhen.

Auf der Grundlage einer Semantik S kann man rein syntaktische Systeme K (Kalküle) aufstellen, deren Ableitungsregeln semantisch gültigen Schlussformen entsprechen. Schreibt man für die Gültigkeit »$\models$« und für die Ableitbarkeit »$\vdash$«, dann soll für das Verhältnis von K zu S gelten:

$$\Sigma \models_S \mathfrak{A} \Leftrightarrow \Sigma \vdash_K \mathfrak{A}$$

Erfüllt ein Kalkül K bezüglich einer Semantik S diese Regel von links nach rechts, dann heißt er *vollständig* bezüglich S. Erfüllt er sie von rechts nach links, dann heißt er *korrekt* bezüglich S. Ich benutze hier und im Folgenden große griechische Buchstaben wie Σ zur Abkürzung von Listen von (durch Kommata getrennten) Instanzen von Formeln. Diese Listen können gegebenenfalls auch nur eine Formel enthalten oder ganz leer sein. Wichtig ist aber, dass es sich um *Listen* handelt und nicht um *Mengen*. Das heißt, eine Formel kann auf einer solchen Liste mehrfach auftreten, und auch die Reihenfolge der auftretenden Formeln ist (zumindest zunächst) nicht vernachlässigbar.

Will man nun Argumente, die in irgendwelchen natürlichen Sprachen formuliert sind, auf logische Gültigkeit prüfen, dann bringt man sie in einem ersten Schritt auf »Standardform« – setzt also die Konklusion an das Ende und trennt sie dabei zugleich (etwa durch einen Strich) von den Prämissen ab. Dann bringt man Prämissen und Konklusion des Arguments auf ihre »logische Form«, also die Syntax des Logikkalküls. Hierzu geht man folgendermaßen vor: Zunächst sucht man in den natürlichsprachlichen Aussagen relevante Schlüsselwörter auf – wie »und«, »aber«, »nur«, »oder«, »alle«, »nicht« und »wenn-dann« – und identifiziert diese jeweils (wenn der Kontext dies zulässt) mit bestimmten logischen Partikeln. Dabei ist zu beachten, dass relevante Partikel in einer natürlichsprachlichen Aussage eventuell nur implizit auftreten – etwa »alle« und »wenn-dann« in der Aussage »Gärtner sind verdächtig«. Im Anschluss an diesen Schritt muss für jede Aussage die *Struktur* ihrer Zusammensetzung aus Teilaussagen mittels der für sie als einschlägig identifizierten Partikel ermittelt werden. Dies läuft auf zwei Fragen hinaus: die des Bereichs, über den sich Quantoren und Negatoren erstrecken, sowie die der Bindung bei zweistelligen Junktoren. (Auf dem Hintergrund der weitest verbreiteten Notationsvariante kann man auch sagen, dass es in diesem Schritt um das semantisch adäquate Setzen von Klammern geht.) Schließlich ersetzt man noch die elementaren Teilaussagen und Aussageformen entsprechend ihrer Form durch elementare Formeln des Logikkalküls – semantisch gleiche Instanzen immer durch Instanzen *derselben* Formel.

Diesen ganzen Vorgang nennt man das *Formalisieren* der betreffenden natürlichsprachlichen Aussagen bzw. des natürlichsprachlichen Arguments. Ist die durch (korrektes) Formalisieren entstandene Schlussform im Sinne der Semantik logisch gültig, dann auch der dem Argument zugrundeliegende Schluss. Man beachte: Auch wenn ein Schluss sich nicht als *logisch* gültig erweist, kann er im Einzelfall aufgrund der Bedeutung in ihm auftretender nichtlogischer Ausdrücke gleichwohl (*semantisch*) gültig sein – ein Beispiel hierfür wäre der Schluss von »Hans ist größer als Fritz« auf »Fritz ist kleiner als Hans«. Ob ein schlüssiges Argument am Ende auch ein »gutes« ist, hängt dann freilich noch von der Wahrheit seiner Prämissen ab.

Betrachten wir das oben geschilderte Verhältnis von Semantik und Logikkalkül, dann sehen wir, dass mit Bezug auf den Aufbau der Logik nicht die Syntax, sondern die Semantik der logischen Partikel das wesentliche Problem darstellt. Man kann nicht einfach irgendwelche Schlussregeln aufschreiben, weil man dann nicht weiß, ob diese die logisch gültigen Schlüsse korrekt und vollständig wiedergeben. Die Betonung sollte hier allerdings auf dem Wort »irgendwelche« liegen – jedenfalls, wenn man Ludwig Wittgensteins Einsicht nicht aufgeben möchte, dass die Bedeutung eines Ausdrucks in seinem Gebrauch nach Regeln besteht. Semantische Regeln für den im Hinblick auf Wahrheit korrekten Gebrauch eines Ausdrucks stellen diesen immer in den Kontext von Aussagen und *sind* damit letztlich gar nichts anderes als Schlussregeln. Was wir brauchen, sind also Schlussregeln, die *zugleich* als (vollständig) bedeutungskonstitutiv für die logischen Partikel gelten dürfen. Ich nenne eine entsprechende Semantik eine *Regelsemantik*.

(2) Methodische Probleme modelltheoretischer Semantikkonzeptionen

Damit bewegen wir uns bereits außerhalb des logischen Mainstreams, wo man die Semantik von Logikkalkülen (seit den Arbeiten von Alfred Tarski und Rudolf Carnap) modelltheoretisch angeht. Das modelltheoretische Vorgehen ist am Ende nichts anderes als eine generalisierte Form des Sprachaufbaus nach dem klassischen Verfahren der Konstruktion einer Objekt- in einer Metasprache mittels der Angabe von Wahrheitsbedingungen. Nur interpretiert man die Individuenkonstanten $\mathfrak{c}$ und Prädikatorkonstanten $\mathfrak{F}^n$ der Objektsprache *L* (erster Stufe) nicht *konkret*, sondern im Hinblick auf beliebige nicht-leere Mengen *U* (»Universen«) von (letztlich anonym bleibenden) Gegenständen. In einer Interpretation *I* der formalen Sprache *L* (mittels der Interpretationsfunktion $||$) wird mit Bezug auf jedes beliebig gegebene Universum *U* jeder Individuenkonstante $\mathfrak{c}$ ein Gegenstand $|\mathfrak{c}| \in U$ als Denotat zugeordnet, und jeder n-stelligen Prädikatorkonstante $\mathfrak{F}^n$ als ihr Denotat $|\mathfrak{F}^n|$ die Menge der geordneten *n*-Tupel $<|\mathfrak{c}_1|,\ldots,|\mathfrak{c}_n|>$, welche $\mathfrak{F}^n$ in *I* erfüllen sollen. Den wohlgeformten Formeln von *L* ordnet *I* nun auf folgende Weise genau einen der beiden Wahrheitswerte w (»wahr«) bzw. f (»falsch«) zu: $|\mathfrak{F}^n\mathfrak{c}_1,\ldots,\mathfrak{c}_n|=$w in *I* genau dann, wenn $<|\mathfrak{c}_1|,\ldots,|\mathfrak{c}_n|> \in |\mathfrak{F}^n|$, sonst $|\mathfrak{F}^n\mathfrak{c}_1,\ldots,\mathfrak{c}_n|=$f. Zur Berechnung der Wahrheitswerte der komplexen Formeln benutzt man (als Bestandteil von $||$) folgende (oder äquivalente) weitere Evaluationsfunktionen:

$|\neg\mathfrak{A}|=$w genau dann, wenn $|\mathfrak{A}|=$f, (sonst $|\neg\mathfrak{A}|=$f)
$|\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}|=$w genau dann, $|\mathfrak{A}|=$w und $|\mathfrak{B}|=$w, (sonst $|\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}|=$f)
$|\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}|=$w genau dann, wenn $|\mathfrak{A}|=$w oder $|\mathfrak{B}|=$w (sonst $|\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}|=$f)
$|(\mathfrak{A}\rightarrow\mathfrak{B})|=$w genau dann, wenn $|\mathfrak{A}|=$f oder $|\mathfrak{B}|=$w (sonst $|(\mathfrak{A}\rightarrow\mathfrak{B})|=$f)
$|(\mathfrak{A}\leftrightarrow\mathfrak{B})|=$w genau dann, wenn $|\mathfrak{A}|=|\mathfrak{B}|$ (sonst $|(\mathfrak{A}\leftrightarrow\mathfrak{B})|=$f)

$|\bigwedge\mathfrak{x}\mathfrak{A}|$=w genau dann, wenn für eine in $\mathfrak{A}$ nicht auftauchende Individuenkonstante $\mathfrak{c}$ und jede $\mathfrak{c}$-variante Interpretation $I_{\mathfrak{c}}$ $|\mathfrak{A}\mathfrak{x}/\mathfrak{c}|$=w (sonst $|\bigwedge\mathfrak{x}\mathfrak{A}|$=f)
$|\bigvee\mathfrak{x}\mathfrak{A}|$=w genau dann, wenn für mindestens eine in $\mathfrak{A}$ nicht auftauchende Individuenkonstante $\mathfrak{c}$ und mindestens eine $\mathfrak{c}$-variante Interpretation $I_{\mathfrak{c}}$ $|\mathfrak{A}\mathfrak{x}/\mathfrak{c}|$=w (sonst $|\bigvee\mathfrak{x}\mathfrak{A}|$=f)

Eine $\mathfrak{c}$-variante Interpretation $I_{\mathfrak{c}}$ unterscheidet sich dabei von I höchstens dadurch, dass der Konstanten $\mathfrak{c}$ ein anderer Gegenstand $|\mathfrak{c}| \in U$ als Denotat zugeordnet wird. Erhält in einer Interpretation I jede Formel $\mathfrak{A}_i$ einer Formelmenge $\{\mathfrak{A}_1,\ldots,\mathfrak{A}_n\}$ den Wahrheitswert »wahr«, dann ist I ein *Modell* für diese Formelmenge. Eine Implikationsaussage $\mathfrak{A}_1,\ldots,\mathfrak{A}_n \vDash \mathfrak{A}$ ist wahr bzw. die ihr korrespondierende Schlussform *gültig* genau dann, wenn alle Modelle der Prämissenmenge $\{\mathfrak{A}_1,\ldots,\mathfrak{A}_n\}$ auch Modelle für die Einermenge der Konklusion $\{\mathfrak{A}\}$ sind. Als Spezialfall hiervon gilt: Eine Formel $\mathfrak{A}$ ist *logisch wahr* genau dann, wenn alle Interpretationen Modelle für $\{\mathfrak{A}\}$ sind. (Dem entspricht zugleich eine wahre Implikationsaussage $\vDash \mathfrak{A}$ mit leerer Prämissenmenge.)

Hier ist ein kurzer Exkurs zum Ausdruck »Implikation« angebracht. Eine Implikationsaussage ist keine einfache »Wenn-Dann«-Aussage, in welcher zwei Teilaussagen durch »wenn-dann« zu einer komplexeren Aussage verbunden sind. Eine Implikation ist vielmehr eine n+1-stellige relationale Tatsache. Die Implikationsrelation besteht zwischen den n Aussagen einer Prämissenmenge (oder Liste) und einer weiteren Aussage (der Konklusion) genau dann, wenn der Schluss von den Prämissen auf die Konklusion gültig ist. Mit Blick auf die Syntax der Logikkalküle, die Formeln anstelle von Aussagen zu Objekten haben, hat eine Implikations*aussage* die Form $\mathfrak{A}_1,\ldots,\mathfrak{A}_n \vDash \mathfrak{A}$. Sie besagt, dass zwischen den Formeln die Implikationsbeziehung besteht bzw. der betreffende Schluss gültig ist. Eine Implikationsaussage kann (als Aussage) nicht gültig oder ungültig, sondern (von Unentscheidbarkeit einmal abgesehen) nur wahr bzw. falsch sein. Insofern ist es nachlässig, außer von gültigen bzw. ungültigen Schlussformen auch von »gültigen« bzw. »ungültigen Implikationen« zu sprechen. Denn eine »ungültige« Implikation ist eigentlich *gar keine* Implikation: Wenn eine Implikationsaussage falsch ist, dann besteht ja die Implikationsrelation zwischen den betreffenden Aussagen überhaupt nicht. Allerdings findet die kritisierte Redeweise zumindest darin eine gewisse Berechtigung, dass man mit ihr die metasprachliche Bezogenheit des Implikationszeichens auf *Schlüsse* betonen will (weswegen auch ich gelegentlich in sie verfalle).

Aus der Perspektive einer Gebrauchstheorie der Bedeutung, wie sie in §5 begründet wurde, erscheinen modelltheoretische Semantiken *als* Semantiken (wenn auch nicht unbedingt als technische Hilfsmittel) von vornherein verfehlt. Dabei muss man allerdings zur Kenntnis nehmen, dass aus der Perspektive der Modelltheoretiker dasselbe für Regelsemantiken gilt. Wer also nicht bereits durch die in §5 vorgebrachten Argumente davon überzeugt ist, dass die Bedeutung eines Ausdrucks nicht in einem ihm zugeordneten Gegenstand, sondern in seinem Gebrauch nach Regeln besteht, den wird der alleinige Hinweis auf die gebrauchstheoretische Inadäquatheit nicht von der modelltheoretischen Semantik abrücken lassen. Jedoch lässt sich der modelltheoretischen Semantik ein gravierender Defekt nachweisen, der von der Gebrauchstheorie der Bedeutung gänzlich unabhängig ist. Damit meine ich das selten explizit bestrittene, aber seltsamerweise weitgehend ignorierte Faktum, dass modelltheoretische Semantiken bei der metasprachlichen Formulierung von Wahrheitsbedingungen für die zu interpretierenden logisch komplexen Formeln objektsprachlicher Logiksysteme die auf diese Weise semantisch zu bestimmenden Partikel bereits zur Anwendung bringen müssen. Dies konstituiert nicht nur einen Definitions-, sondern auch gleich noch einen Begründungszirkel, weil im selben Zuge auch die für die Objektsprache erst als gültig zu erweisenden Schlussformen im Rahmen metasprachlicher modelltheoretischer Argumentationen bereits als gültig unterstellt werden müssen. Ich möchte diese Tatsache kurz an einem konkreten Beispiel verdeutlichen. Betrachten wir die folgende Implikation:

$$\neg\bigvee\mathfrak{x}\mathfrak{A} \vDash \bigwedge\mathfrak{x}\neg\mathfrak{A}$$

Das ist der Schluss von »Kein x ist A« auf »Alle x sind nicht A«. Die modelltheoretische Argumentation für seine Gültigkeit sieht folgendermaßen aus: »Angenommen, in einer Interpretation I gilt $|\neg\bigvee\mathfrak{x}\mathfrak{A}|$=w. Damit gilt auch $|\bigvee\mathfrak{x}\mathfrak{A}|$=f. Das bedeutet wiederum, dass es nicht der Fall ist, dass für mindestens eine in $\mathfrak{A}$ nicht auftauchende Individuenkonstante $\mathfrak{c}$ und eine $\mathfrak{c}$-variante Interpretation $I_\mathfrak{c}$ $|\mathfrak{A}\mathfrak{x}/\mathfrak{c}|$=w. *Also* gilt in I für jede in $\mathfrak{A}$ nicht auftauchende Individuenkonstante $\mathfrak{c}$ und jede $\mathfrak{c}$-variante Interpretation $I_\mathfrak{c}$ $|\mathfrak{A}\mathfrak{x}/\mathfrak{c}|$=f bzw. $|\neg\mathfrak{A}\mathfrak{x}/\mathfrak{c}|$=w. Daher gilt in I $|\bigwedge\mathfrak{x}\neg\mathfrak{A}|$=w.« In dem mit »also« beginnenden Satz wird von der Implikation $\neg\bigvee\mathfrak{x}\mathfrak{A} \vDash \bigwedge\mathfrak{x}\neg\mathfrak{A}$ metasprachlich bereits Gebrauch gemacht.

Da das Zirkularitätsproblem in modelltheoretischen Semantiken konstruktionsbedingt unvermeidbar ist, taugt die Modelltheorie weder zur Erläuterung der Bedeutung der logischen Partikel noch zur Begründung der Gültigkeit logischer Schlüsse.

Nehmen wir aber einmal an, jemand sei weder von der Gebrauchstheorie der Bedeutung zu überzeugen *noch* davon, dass es ein Problem darstellt, die für die Objektsprache allererst als gültig auszuweisenden Schlussformen in der semantischen Metasprache auf zirkuläre Weise bereits als gültig zu unterstellen. So merkwürdig das klingen mag, beschreibt dies doch die herrschende Mainstream-Position. Verständlich ist das allein auf dem Hintergrund, dass der Mainstream Bedeutungstheorien derzeit nur als Übersetzungshandbücher anzusehen bereit ist und die Begründungsziele der klassischen Erkenntnistheorie aufgegeben hat.

Gleichwohl lassen sich modelltheoretische Semantiken dann selbst noch ganz unabhängig von der Frage nach den grundlegenden Aufgaben und Zielen der Bedeutungs- und Erkenntnistheorie mit einem schwerwiegenden Einwand konfrontieren. Dieser hat mit der intendierten Anwendung der Prädikatenlogik erster Stufe zu tun: der Formalisierung und Evaluation natürlichsprachlicher Argumente. Um ihn nachvollziehen zu können, muss man allerdings erst eingesehen haben, dass die modelltheoretische Semantik in der von mir in diesem Artikel dargestellten Standardform mit der Klassischen Logik zu einem für die Evaluation von Argumenten gänzlich ungeeigneten Logiksystem führt. Für Antirealisten ist die Klassische Logik bekanntlich bereits aus erkenntnistheoretischen Gründen inakzeptabel, weil das für sie charakteristische Prinzip »Tertium-Non-Datur« (TND) wissenstranszendente Wahrheiten ermöglicht – siehe hierzu gegebenenfalls noch einmal §5. Gleichwohl hat die Inadäquatheit, die ich hier im Blick habe, mit TND nichts zu tun, sondern beruht vielmehr auf Umständen, welche etwa die Intuitionistische Logik als ebenso ungeeignet erweisen. Worin jene Inadäquatheit besteht, werde ich im Artikel (5) ausführen.

Nehmen wir für das Folgende einmal hypothetisch an, ich behielte in dieser Angelegenheit Recht, so ergibt sich für die Modelltheorie folgendes Problem: Einerseits kann man durchaus auch andere Systeme als die Klassische Logik modelltheoretisch behandeln. Dazu muss man das modelltheoretische Standardsystem durch sogenannte »relationale« Semantiken ersetzen. Diese sind dadurch gekennzeichnet, dass die in ihnen auftretenden Evaluationsfunktionen die Wahrheit (bzw. Falschheit) von Formeln jeweils auf einen Index beziehen. Viele Leserinnen und Leser werden dies bereits von der Modallogik her kennen, wo man solche Semantiken »Mögliche-Welten-Semantiken« nennt. Die Indizes (»mögliche Welten«), auf welche die Wahrheit modallogischer Formeln bezogen wird, sind maximal-vollständige und konsistente Beschreibungen, welche die interpretierten Formeln wahr bzw. falsch werden lassen. Nun sind solche Semantiken (aufgrund des im Zuge der Aufstellung von Kriterien für »Querwelteinidentität« zu investierenden Essentialismus) bereits mit Blick auf ein philosophisch adäquates Verständnis der Modalitäten problematisch, jedoch ist dies nicht der Punkt, auf den ich hier hinaus möchte. Vielmehr geht es mir darum, dass sich relationale Semantiken, sobald man sie auf prädikatenlogische Nicht-Standard-Systeme ausdehnt, sehr oft erheblich komplizierter gestalten als von den gängigen Modallogiken her gewohnt. So enthalten etwa die relationalen Semantiken für die von mir später (Artikel (5)) argumentationstheoretisch auszuzeichnenden »Relevanzlogiken« typischerweise anstelle der üblichen zweistelligen »Erreichbarkeitsrelation« (zwischen möglichen Welten) eine schwierig deutbare *dreistellige* Relation. Die Menge gültiger Schlüsse, die man im Rahmen dieser Semantiken erhält, hängt dann wiederum wesentlich davon ab, welche Eigenschaften man jener Relation genauer zuzuschreiben geneigt ist. Relationale Semantiken mit dreistelliger »Erreichbarkeitsrelation« sind zwar mit Blick auf gewisse technische Fragen durchaus von Interesse – etwa wenn es darum geht, zu entscheiden, ob ein System eine konservative Erweiterung eines anderen darstellt. Aufgrund ihrer intuitiven Undurchschaubarkeit vermögen sie jedoch gerade die aus erkenntnistheoretischer Sicht wichtigste Aufgabe einer Semantik der Logik nicht zu erfüllen, nämlich die Bedeutung der Implikationsrelation $\models$ und der logischen Partikel aufzuklären. Stattdessen bedürfen diese Semantiken, wie nicht zuletzt die ausgedehnte und kontroverse Diskussion um sie zeigt, *selbst* einer Deutung. Mit dieser Bemerkung möchte ich die Diskussion um die modelltheoretische Semantikkonzeption schließen. Für eine ausführliche kritische Diskussion relationaler Semantiken für Relevanzlogiken siehe gegebenenfalls *On inferring*, §9.

(3) Methodische Probleme gebrauchstheoretischer Semantikkonzeptionen

Nun gibt es in der Logik neben der modelltheoretischen Semantiktradition durchaus auch eine Tradition gebrauchstheoretischer Semantik. Diese geht auf den Logiker Gerhard Gentzen (1909-1945) zurück, vor allem dessen Dissertation *Untersuchungen über das logische Schließen* (in: Mathematische Zeitschrift, 1934/1935, 39, 2/3, 176-210 u. 405-431). Obwohl Gentzens Auffassung der Bedeutung der logischen Partikel zwanglos zu Wittgensteins Gebrauchstheorie der Bedeutung passt, waren Gentzens Arbeiten *de facto* nicht von Wittgenstein beeinflusst, der seine Überlegungen etwa zeitgleich zu entwickeln begann, jedoch nur wenigen Personen (z.B. im *Blue book*) zugänglich machte.

Aus gebrauchstheoretischer Sicht zeigt sich die Bedeutung eines Ausdrucks, sofern er nicht bereits selbst in die Kategorie »Satz« fällt, nur im Rahmen seiner Verwendung *in* Sätzen (Kontextprinzip). Daher liegt es nahe, die semantischen Regeln für eine logische Partikel * folgendermaßen festzulegen:

i) Man formuliert Regeln, die angeben, unter welchen Bedingungen man aus *weniger komplexen* Aussagen auf eine *komplexere* Aussage schließen darf, welche die Partikel * als äußerste Partikel (»Hauptpartikel«) enthält.
ii) Man formuliert Regeln, die angeben, unter welchen Bedingungen man von einer Aussage, welche die Partikel * als Hauptpartikel enthält, (eventuell im Kontext weiterer Aussagen) auf eine (im Normalfall) weniger komplexe Aussage schließen darf, welche die betreffende Partikel (im Normalfall) nicht mehr als Hauptpartikel enthält.

Seit Gentzen heißen die semantischen Regeln der Sorte i) für eine logische Partikel * ihre *Einführungsregeln*, die Regeln der Sorte ii) ihre *Beseitigungsregeln*. Insoweit man formale Logik betreibt, formuliert man diese Regeln wieder gleich für Formeln. Als Beispiele mögen hier zunächst Einführungs- und Beseitigungsregeln für den Konjunktor »$\wedge$«, den Subjunktor »$\rightarrow$« und den Negator »$\neg$« dienen:

($\wedge$E) $\mathfrak{A},\mathfrak{B} \Rightarrow \mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}$
($\wedge B_1$) $\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B} \Rightarrow \mathfrak{A}$
($\wedge B_2$) $\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B} \Rightarrow \mathfrak{B}$

($\rightarrow$E) $[\mathfrak{A}]\ldots\mathfrak{B} \Rightarrow \mathfrak{A}\rightarrow\mathfrak{B}$
($\rightarrow$B) $\mathfrak{A},\mathfrak{A}\rightarrow\mathfrak{B} \Rightarrow \mathfrak{B}$

($\neg$E) $[\mathfrak{A}]\ldots\curlywedge \Rightarrow \neg\mathfrak{A}$
($\neg$B) $\mathfrak{A},\neg\mathfrak{A} \Rightarrow \curlywedge$

($\wedge$E) besagt, dass man aus zwei Formeln $\mathfrak{A},\mathfrak{B}$ auf $\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}$ schließen darf.
($\wedge B_1$) und ($\wedge B_2$) besagen, dass man aus $\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}$ auf $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$ schließen darf.
($\rightarrow$E) ist so zu lesen, dass, falls sich $\mathfrak{B}$ unter der Annahme $\mathfrak{A}$ ableiten lässt (die Ableitung wird durch die drei Punkte angedeutet), unabhängig von jener Annahme (die deshalb in eckige Klammern gesetzt ist) auf $\mathfrak{A}\rightarrow\mathfrak{B}$ geschlossen werden darf.
($\rightarrow$B) besagt, dass man aus $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}\rightarrow\mathfrak{B}$ auf $\mathfrak{B}$ schließen darf (»Modus Ponens«).
($\neg$E) besagt, dass, falls sich unter der Annahme $\mathfrak{A}$ ein Widerspruch $\curlywedge$ ableiten lässt, unabhängig von jener Annahme auf $\neg\mathfrak{A}$ geschlossen werden darf.
($\neg$B) besagt, dass man aus $\mathfrak{A}$ und $\neg\mathfrak{A}$ einen Widerspruch $\curlywedge$ erhält.

Auf solchen Regeln aufbauende Logikkalküle heißen seit Gentzen »Kalküle des Natürlichen Schließens«. Im Unterschied zu den üblichen axiomatischen Kalkülen vom Hilbert-Typ finden sich in Kalkülen des Natürlichen Schließens weder Axiome (bzw. Axiomschemata) noch muss es sich bei den Prämissen (und Konklusionen) einer Deduktion um logische Wahrheiten handeln. Im Ausgleich für das Fehlen von Axiomen stehen Schlussregeln für jede Partikel zur Verfügung (im Hilbert-Typ-Kalkül normalerweise nur Subjunktionsbeseitigung, Alleinführung und gegebenenfalls Substitution). Anders als Hilbert-Typ-Kalküle sind Kalküle des Natürlichen Schließens prinzipiell dazu geeignet, die faktische Argumentationspraxis zumindest im Hinblick auf ihre formalen Aspekte adäquat darzustellen (daher »natürliches« Schließen). Da Regeln des Natürlichen Schließens im Unterschied zu axiomatisch gesetzten Bestimmungen unmittelbar die *Verwendung* der Partikel betreffen, können sie als semantische Regeln für diese Partikel gelten. Entsprechend werden gerade Kalküle des Natürlichen Schließens von den meisten Gebrauchstheoretikern als die *semantisch ausgezeichneten* Kalküle angesehen. Oft werden dabei auch noch die Einführungsregeln für semantisch primär gehalten, da sie es sind, welche festlegen, wie man ausgehend von *elementaren* Aussagen (welche die betreffenden Partikel also noch nicht enthalten) zur Begründung logisch *komplexer* Aussagen gelangen kann (welche sie enthalten). Schon Gentzen schreibt in diesem Sinne (1934/35, S. 189):

> Die Einführungen stellen sozusagen die »Definitionen« der betreffenden Zeichen dar, und die Beseitigungen sind letzten Endes nur Konsequenzen hiervon, was sich etwa so ausdrücken läßt: Bei der Beseitigung eines Zeichens darf die betreffende Formel, um deren äußerstes Zeichen es sich hier handelt, nur »als das benutzt werden, was sie auf Grund der Einführung dieses Zeichens bedeutet.«

Wenn man also die Bedeutung eines Zeichens für eine logische Partikel über Einführungsregeln *per conventionem* bestimmt, so sind die Beseitigungsregeln hierdurch bereits festgelegt. Dass dies in der Tat nicht anders sein kann, lässt sich an der von Arthur Prior (*The runabout inference-ticket*, in: Analysis, 1960, 21, 2, 38-39) diskutierten (fiktiven) Partikel »tonk« vorführen, welche die Gentzensche Vorschrift verletzt. Ihre Einführungs- und Beseitigungsregeln lauten folgendermaßen:

(tonkE) $\mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{A}$ tonk $\mathfrak{B}$
(tonkB) $\mathfrak{A}$ tonk $\mathfrak{B} \Rightarrow \mathfrak{B}$

Die auf diese Weise festgelegten Regeln für »tonk« gestatten offensichtlich im Umweg über eine mit dieser Partikel zusammengesetzte Aussage den Schluss von beliebigen Aussagen auf beliebige andere. Prior war der Ansicht, dass dies die Inadäquatheit des gebrauchstheoretischen Ansatzes in der Logik demonstriere. Tatsächlich zeigt »tonk« nur, dass man Gentzens oben zitierte Warnung ernst nehmen muss. Verwendungsregeln für Ausdrücke dürfen nicht in *jeder* Hinsicht willkürlich gesetzt werden, sondern sind vielmehr einer ganzen Reihe von Forderungen unterworfen. Wir sehen das, wenn wir uns etwa die Bedingungen expliziten Definierens vor Augen führen (siehe hierzu gegebenenfalls noch einmal die einschlägigen Ausführungen gegen Ende von §11 (4)). Die meisten dieser Bedingungen haben damit zu tun, dass Definitionen nicht »kreativ« sein dürfen, die explizite Definition eines neuen Zeichens den Bestand der als wahr geltenden Aussagen also nur *konservativ* erweitern darf. Das ist genau dann der Fall, wenn die Definition den Bestand derjenigen Aussagen, in welchen der definierte Ausdruck *nicht* vorkommt, unverändert lässt.

Diese Forderung ist auch an die Einführungs- und Beseitigungsregeln für logische Partikel zu richten. Sobald Einführungsregeln für Partikel erst einmal konventionell vereinbart sind, ist man in der Setzung der Beseitigungsregeln nicht mehr frei. Genauer gesagt ist man bereits vollständig festgelegt, da die Beseitigungsregeln nicht *mehr*, aber auch nicht *weniger* erlauben sollen, als die Einführungsregeln rechtfertigen. Die Beseitigungsregeln für eine Partikel sollen den stärksten Schluss darstellen, der aufgrund der Einführungsregeln für diese Partikel gestützt werden kann. Prinzipiell könnte man anstatt von den Einführungs- auch von den Beseitigungsregeln ausgehen: Dann müssen die Einführungsregeln die *schwächsten* Regeln sein, welche die Beseitigungsregeln zu rechtfertigen gestatten. Im Anschluss an Michael Dummett (siehe *Truth and other enigmas*, Kap. 14, S. 221) spricht man heute von der Forderung nach »Harmonie« zwischen Einführungs- und Beseitigungsregeln.

So banal die Harmonieforderung aus definitionstheoretischer Perspektive auch scheinen mag, so überraschend sind manche ihrer Konsequenzen, insbesondere mit Bezug auf die Negation. Klassisch würde man anstatt der oben gegebenen Regeln eine Fassung wählen wollen, in welcher »Duplex Negatio Affirmat« (DNA) die Rolle der Negationsbeseitigungsregel (¬B) einnimmt. Das wird in bekannten Logiklehrbüchern wie zum Beispiel *Grundzüge der Logik I* von Wilhelm K. Essler (*1940) und Rosa Martinez Cruzado von 1991 auch genau so gehandhabt. Man hat es dann also im Wesentlichen mit folgendem Regelset zu tun:

(¬E) $[\mathfrak{A}]\ldots\curlywedge \Rightarrow \neg\mathfrak{A}$
(¬B) $\neg\neg\mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{A}$

Weil $\curlywedge$ in der klassischen (¬B) nicht auftritt, muss (sofern man das Zeichen überhaupt beibehält) explizit vereinbart werden, dass $[\mathfrak{A}]\ldots\curlywedge$ als Abkürzung dafür dient, dass sich unter der Annahme $\mathfrak{A}$ für irgendeine Formel $\mathfrak{C}$ sowohl $\mathfrak{C}$ als auch $\neg\mathfrak{C}$ herleiten lässt. Die Leistung der durch DNA ersetzten Negationsbeseitigungsregel wird damit *nicht* durch die neue Beseitigungsregel übernommen, sondern steckt implizit bereits in der Vereinbarung für die Negationseinführung. Das ist freilich ganz unbedenklich, weil sich die Beseitigungsregeln ohnehin aus den Einführungsregeln ergeben sollen. Ein Problem ist hingegen, dass die neue (¬B) dies nicht erfüllt, also nicht mit (¬E) harmonisiert. Entsprechend bemerkt schon Gentzen (1934/35, S. 190):

> Doch diese Schlußfigur fällt insofern noch immer aus dem Rahmen der NJ-Schlußfiguren heraus, als sie eine neue Negationsbeseitigung darstellt, deren Zulässigkeit keineswegs aus der Art der Nicht-Zeichen-Einführung durch die *NE* [also (¬E), D. H.] hervorgeht.

Die klassische (¬B) geht also über das, was durch (¬E) semantisch lizensiert wird, hinaus. Dies ist auch der tieferliegende Grund für die bereits in §11 (4) (im Rahmen der Diskussion des semantischen Holismus) gemachte Beobachtung, dass das klassische Regelset für die Negation die Menge der junktorenlogischen Theoreme, die ohne die Negationsregeln beweisbar sind, auf nicht-konservative Weise erweitert (beispielsweise in Gestalt des »Peirceschen Theorems«). Autoren wie Dag Prawitz (siehe *Natural deduction. A proof-theoretical study*, 1965) haben hieraus den Schluss gezogen, dass die klassische Negation schlicht semantisch inkorrekt ist. Da gezeigt werden kann, dass es zudem auch keine zulässige Möglichkeit gibt, die Regel (¬E) von vornherein so zu gestalten, dass sie mit DNA harmonisiert, schließe ich mich dieser Auffassung an (siehe hierzu mein *On inferring*, §13, S. 148-150). Weil DNA das TND im Gefolge hat, sprechen freilich bereits eine Reihe externer erkenntnis- bzw. bedeutungstheoretischer Argumente gegen seine (universelle) Gültigkeit als logisches Prinzip (a.a.O., §13, S. 150-159). Der definitionstheoretische Verweis auf die Verletzung der Harmonieforderung durch die klassische Negation scheint mir aber besonders sparsam, da er keine unmittelbaren Bezüge zu hochstrittigen Themen wie Realismus/Antirealismus usw. herstellen muss.

Obwohl Regeln Natürlichen Schließens alle Anforderungen an semantische Regeln erfüllen, sind Kalküle Natürlichen Schließens meiner Auffassung nach dennoch nicht geeignet, die Rolle von Semantiken für Logiken zu übernehmen. Das liegt einfach daran, dass man von der Semantik für eine Logik mehr erwartet als *nur* die Verwendungsregeln für die logischen Partikel zu explizieren. Bevor ich diesen Punkt vertiefe, möchte ich allerdings zunächst zwei andere Probleme aufwerfen, die entstehen, wenn man Kalküle des Natürlichen Schließens als Semantiken für die durch sie ausgedrückten Logiken betrachtet:

Das erste (und zugegebenermaßen geringste) Problem hängt mit der Harmonieforderung zusammen. Damit ein Kalkül des Natürlichen Schließens überhaupt als Semantik gelten darf, müssen, wie wir gesehen haben, die Einführungs- und Beseitigungsregeln für seine Partikel in Harmonie zueinander stehen. In gewisser Weise entspricht Harmonie der Vollständigkeit und Korrektheit: Hat man zu schwache Beseitigungsregeln, ist die Logik nicht vollständig, hat man zu starke, ist sie nicht korrekt. Es mutet dann allerdings etwas merkwürdig an, dass man dies von dem als »Semantik« angesehenen System *selbst* zeigen muss.

Daran schließt sich ein zweites, schwerwiegenderes Problem an, das besonders deutlich im Rahmen eines Vergleichs mit der modelltheoretischen Semantik zutage tritt: In jener lässt sich klar definieren, was eine logische Partikel ist. Mit Bezug auf die klassische Prädikatenlogik sind das alle Partikel, die *Wahrheitsfunktionen* darstellen, für die sich also die Wahrheitswerte der mit ihnen zusammengesetzten Aussagen funktional aus den Wahrheitswerten der Teilaussagen ergeben (mit Bezug auf quantifizierte Aussagen $\bigwedge xAx$, $\bigvee xAx$ gelten alle Aussagen Ac als »Teilaussagen«). Es lässt sich zeigen, dass sich alle wahrheitsfunktionalen n-stelligen Junktoren (inklusive dem einstelligen Negator) auf zweistellige zurückführen lassen und alle (sechzehn) zweistelligen Junktoren auf einen einzigen (»weder-noch« bzw. »ist unverträglich mit«). Mit Hilfe des Negators lassen sich darüber hinaus alle Quantoren auf einen reduzieren. Man kann auf diesem Hintergrund eine weitere Art der Vollständigkeit von Kalkülen in den Blick nehmen, die sogenannte »expressive Adäquatheit«: Ein Kalkül ist bezüglich einer Semantik *expressiv adäquat* genau dann, wenn er nicht nur hinsichtlich der Partikel, die er *de facto* enthält, vollständig und korrekt ist, sondern wenn sich in ihm *alle* logischen Partikel explizit definieren lassen. Im modelltheoretischen Rahmen lässt sich die expressive Adäquatheit eines Kalküls leicht überprüfen. Im Rahmen einer Semantik auf der Basis des Natürlichen Schließens bleibt hingegen unklar, was der Ausdruck »logische Partikel« bedeutet, und – daran anschließend – auch, unter welchen Bedingungen expressive Adäquatheit erreicht wäre (welche zudem wieder für das als Semantik angesehene System selbst gezeigt werden müsste).

Diese Schwierigkeiten hängen alle mit dem schon angesprochenen Punkt zusammen, dass man von einer Semantik der Logik zwar *auch* die Bedeutungsklärung der logischen Partikel erwartet, aber eben nicht *nur* dies: Sie soll auch die Bedeutung des Begriffs des gültigen Schlusses selbst explizieren, also sozusagen die Semantik des Regelpfeils – zumindest sofern er wahrheitsvererbende Übergänge betrifft (anstatt bloß syntaktische Regeln). Freilich lässt sich der Begriff des gültigen Schlusses in gewisser Weise ganz leicht definieren: Ein Schluss ist *gültig* genau dann, wenn er nach einer Regel vollzogen wurde, die für alle Instanzen, in welcher die Prämissen allesamt wahr sind, eine wahre Konklusion erzeugt. Dann heißt auch die betreffende Schlussregel selbst »gültig«. In einer solchen metasprachlichen Definition von »gültiger Schluss« treten jedoch die logischen Partikel »alle« und »genau dann, wenn« bereits auf, und von *deren* Verwendung hängt wiederum wesentlich ab, welche Schlüsse sich letztlich als gültig erweisen. (Nebenbei bemerkt verfangen daher »Unvollständigkeitsbeweise« für nichtklassische Logiken nicht, die sich, scheinbar neutral, auf die allgemeine Gültigkeitsdefinition berufen, um dann auf der Metaebene stillschweigend schon ein klassisches Verständnis von »alle« und »wenn-dann« zu investieren – siehe hierzu *On inferring*, §5). Hierdurch erhält die metasprachliche Gültigkeitsdefinition einen Status methodischer Nachträglichkeit.

Aussichtsreicher ist es, mit konkreten Fragen wie den folgenden zu beginnen: Impliziert eine Aussage sich selbst? Darf man in einem gültigen Schluss Prämissen *salva validitate* vertauschen? Kann man sich, anstatt in einer Schlusskette mehrere Instanzen einer Aussage heranzuziehen, *salva validitate* auch mehrfach auf *dieselbe* Instanz der Aussage beziehen? Wenn aus einer Liste Σ von Prämissen die Aussage A folgt, und aus A zusammen mit einer Liste Π von Aussagen die Aussage B, folgt dann aus der Zusammenfügung der Listen Σ und Π *immer* die Aussage B? Und wenn aus einer Liste Σ von Aussagen die Aussage A folgt, folgt A dann auch aus Σ vereinigt mit einer weiteren Liste Π? Selbst wer diese Fragen für völlig trivial hält, wird zumindest zugestehen, dass eine Semantik sie *explizit* beantworten können muss, und zwar schon allein deshalb, weil sich das System gültiger Schlüsse auf dramatische Weise ändert, wenn man auch nur eine einzige jener Fragen anstatt mit »Ja« mit »Nein« beantwortet.

In Kalkülen des Natürlichen Schließens bleiben die fraglichen Bestimmungen immer implizit und im Hintergrund. Sie zeigen sich nicht in den Einführungs- und Beseitigungsregeln für die Partikel, sondern regulieren vielmehr als »Rahmenregeln« mehrschrittige Ableitungen. Um diese Rahmenregeln explizit und sichtbar zu machen, muss man die Metaebene, die Ebene der Schlussregeln selbst, in den Blick nehmen. Schlüsse sind Übergänge von Aussagen zu Aussagen nach Regeln. Sie sind damit Handlungen und *nicht* Aussagen. Dasselbe gilt auch, wenn wir es in Logikkalkülen mit Formeln statt Aussagen zu tun haben. Allerdings können wir einem nach einer Regel vollzogenen Schluss auf der Metaebene immerhin eine (relative) Ableitbarkeitsaussage zuordnen. So lässt sich etwa in Gentzens Kalkül des Natürlichen Schließens NK für die Klassische Logik mittels der Regel ($\wedge$B) aus der Formel $A\wedge(B\vee C)$ die Formel $B\vee C$ ableiten, und dies kann man auf der Metaebene durch eine (relative) Ableitbarkeitsaussage ausdrücken:

$$A\wedge(B\vee C)\vdash_{\mathrm{NK}}B\vee C$$

Der diese Aussage rechtfertigenden Schlussregel ($\wedge$B) entspricht ihrerseits eine (relative) Ableitbarkeitsaussage*form*, nämlich:

$$\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}\vdash_{\mathrm{NK}}\mathfrak{A}$$

mit deren Hilfe sich *alle* auf ($\wedge$B) gründenden Ableitbarkeitsaussagen für NK zusammenfassen lassen.

Man kann nun Kalküle aufbauen, die formale (relative) Ableitbarkeitsaussagen selbst zum Gegenstand haben. Wie die Kalküle des Natürlichen Schließens gehen auch diese sogenannten »Sequenzenkalküle« auf Gentzen (1934/35) zurück. Sequenzen sind nichts anderes als Figuren der Form $\Sigma\vdash\mathfrak{A}$, die auf der Metaebene anderer Kalküle (relative) Ableitbarkeitsaussagen darstellen würden. Daher lassen sich in Sequenzenkalkülen auch die Rahmenregeln von Logikkalkülen explizit als relative Ableitbarkeitsaussagen formulieren. Aus der Perspektive eines methodischen Vorgehens ist ein solches Verfahren zulässig, solange wir die für den Aufbau eines Sequenzenkalküls benötigten objekt- und metasprachlichen Ausdrücke nicht in ihrer Bedeutung als schlicht gegeben betrachten. Wir haben sie zunächst »von unten« her bereitzustellen, indem wir sie an Beispielen und Gegenbeispielen exemplarisch bestimmen. Damit das Unternehmen des Aufbaus einer Logik im Rahmen eines Sequenzenkalküls Sinn macht, müssen die zur Formulierung eines solchen Kalküls benötigten Ausdrucksmittel zudem schwächer sein als die Mittel der mit seiner Hilfe aufzubauenden Logik. Das ist aber unzweifelhaft der Fall: Neben allfälligen Variablen braucht man auf der Metaebene im Wesentlichen nur den Regelpfeil und ein Semikolon, welches das »und« der Prämissenzusammenstellung bedeutet. Beides darf als beherrscht gelten, sobald man überhaupt dazu in der Lage ist, Regeln explizit zu formulieren. Sind Regelpfeil und Semikolon eingeführt, dann bereitet auch das Verständnis der ihnen auf der Objektebene von Sequenzenkalkülen entsprechenden Symbole (Ableitbarkeitssymbol und Komma) kein Problem. Die für die Formulierung der Regeln bzw. Ableitbarkeitsaussagen mit mehreren Prämissen benötigte Bedeutung des Ausdrucks »und« ist die rein aufzählend-zusammenstellende, die sich leicht empraktisch erlernen lässt, *bevor* »und«

im Sinne eines Junktors zur Bildung komplexer Aussagen thematisch gemacht wird.

Im Rahmen von Sequenzenkalkülen werden die Einführungs- und Beseitigungsregeln der Kalküle Natürlichen Schließens zu Regeln, die eine Partikel rechts bzw. links vom Ableitbarkeitssymbol einführen. So transformieren sich etwa die weiter oben gegebenen Einführungs- und Beseitigungsregeln für den Konjunktor, den Subjunktor und den Negator in folgende *Rechts-* und *Linksregeln*:

(∧R) $\Sigma \vdash \mathfrak{A}; \Sigma \vdash \mathfrak{B} \Rightarrow \Sigma \vdash \mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}$
(∧L1) $\Sigma, \mathfrak{A} \vdash \mathfrak{C} \Rightarrow \Sigma, \mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B} \vdash \mathfrak{C}$
(∧L2) $\Sigma, \mathfrak{B} \vdash \mathfrak{C} \Rightarrow \Sigma, \mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B} \vdash \mathfrak{C}$

(→R) $\Sigma, \mathfrak{A} \vdash \mathfrak{B} \Rightarrow \Sigma \vdash \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$
(→L) $\Sigma \vdash \mathfrak{A}; \Pi, \mathfrak{B} \vdash \mathfrak{C} \Rightarrow \Sigma, \Pi, \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B} \vdash \mathfrak{C}$

(¬R) $\Sigma, \mathfrak{A} \vdash \curlywedge \Rightarrow \Sigma \vdash \neg \mathfrak{A}$
(¬L) $\Sigma \vdash \mathfrak{A} \Rightarrow \Sigma, \neg \mathfrak{A} \vdash \curlywedge$

Was nun in einem solchen System neben den semantischen Regeln für die logischen Partikel zusätzlich explizit aufgeschrieben werden soll, sind die längst implizit (aber eben bislang auch *nur* implizit) beherrschten Regeln, welche die Verwendung von Schlussregeln selbst moderieren. Entsprechen die Rechts- und Linksregeln eines Sequenzenkalküls genau den Einführungs- und Beseitigungsregeln eines Kalküls des Natürlichen Schließens, so ist hierdurch nämlich gleichwohl noch nicht gewährleistet, dass sich für jede im Kalkül des Natürlichen Schließens (relativ) beweisbare Implikation im Sequenzenkalkül die entsprechende Sequenz (absolut) beweisen lässt. Hierzu benötigt man vielmehr zusätzlich noch sogenannte *Strukturregeln*. Für Systeme wie die Klassische, Intuitionistische und Minimale Logik handelt es sich dabei vor allen Dingen um

$\Sigma, \Gamma, \Theta, \Pi \vdash \mathfrak{C} \Rightarrow \Sigma, \Theta, \Gamma, \Pi \vdash \mathfrak{C}$ (Vertauschung)
$\Sigma, \Pi, \Pi \vdash \mathfrak{C} \Rightarrow \Sigma, \Pi \vdash \mathfrak{C}$ (Zusammenziehung)
$\Sigma \vdash \mathfrak{C} \Rightarrow \Sigma, \Pi \vdash \mathfrak{C}$ (Verdünnung)
$\Sigma \vdash \mathfrak{A}; \mathfrak{A}, \Pi \vdash \mathfrak{B} \Rightarrow \Sigma, \Pi \vdash \mathfrak{B}$ (Schnitt)

Ich erinnere an dieser Stelle noch einmal daran, dass es sich bei Σ, Π usw. um Variablen für Listen von durch Kommata abgetrennten Formeln handelt.

Während diese Listen auch leer sein dürfen, steht $\mathfrak{C}$ hingegen immer für eine Formel (ich lasse also keine »leeren« Sequenzen zu). Über die genannten Regeln hinaus benötigt man noch ein Axiomschema

$$\mathfrak{A} \vdash \mathfrak{A} \qquad \text{(Selbstimplikation)},$$

das sich prinzipiell ebenfalls als (prämissenlose) Strukturregel auffassen lässt.

Abhängig von der Formulierung der Rechts- und Linksregeln lässt sich in einem derart ausgestatteten Sequenzenkalkül »Schnitt« häufig als redundant (»eliminierbar«) nachweisen (»Gentzenscher Hauptsatz«). Diese Eigenschaft ist von großem *technischem* Interesse, weil sie das Führen eines Widerspruchsfreiheitsbeweises erheblich erleichtert.

Die Strukturregeln und das Axiomschema machen jene Erlaubnisse bzw. Eigenschaften explizit, die in Kalkülen des Natürlichen Schließens entweder implizit bleiben oder doch zumindest nur als »Rahmenregeln« explizit Erwähnung finden. Es handelt sich hierbei aber offensichtlich um *semantische Regeln für den Begriff der Implikation bzw. des gültigen Schlusses selbst*. Eine Semantik der Logik *sollte* sie also explizit machen – gerade so, wie Sequenzenkalküle dies tun.

Und dennoch können auch die üblichen Sequenzenkalküle letztlich nicht als Semantiken für die Logik gelten. Das liegt daran, dass in ihnen der semantische *Zusammenhang* zwischen jenen Regeln, welche allein das Ableitbarkeitssymbol betreffen, und denjenigen Regeln, welche die Verwendung der logischen Partikel bestimmen, gänzlich im Dunklen bleibt. Legen Strukturregeln und Partikelregeln erst *zusammen* den Begriff der logischen Implikation bzw. des logisch gültigen Schlusses fest? In Anbetracht üblicher Sequenzenkalküle scheint es so, als ob man den in den Strukturregeln (inklusive Axiomschema) ausgedrückten allgemeinen Eigenschaften der Implikation Rechts- und Linksregeln für Partikel schlicht *hinzufügt* und damit den Begriff des logisch gültigen Schlusses mit jeder Partikel *erweitert*. Dies liefert aber weder eine Antwort auf die Frage, was eine Partikel letztlich als »logische« kennzeichnet, noch auf die Frage nach dem Kriterium der Vollständigkeit einer Menge solcher Partikel (expressive Adäquatheit). Auch ist die Harmonie der Rechts- und Linksregeln im Rahmen gewöhnlicher Sequenzenkalküle genauso wenig *a priori* gesichert wie im Falle der Einführungs- und Beseitigungsregeln in Kalkülen des Natürlichen Schließens. Sie muss daher auch für übliche Sequenzenkalküle jeweils separat nachgewiesen werden. Von einer Semantik wäre aber zu wünschen, dass sie Harmonie allein schon aufgrund einfacher Konstruktionsmerkmale zu gewährleisten vermag.

(4) Regelsemantik der Implikation als die adäquate Form gebrauchstheoretischer Semantikkonzeption

Um die genannten Schwierigkeiten zu beheben, habe ich in *On inferring* (§10) den folgenden Vorschlag zum Aufbau einer sequenzenbasierten gebrauchstheoretischen Semantik der Logik gemacht:

In einem ersten Schritt werden semantische Regeln aufgestellt, die alleine die Folgerungsbeziehung (Implikation) betreffen. Diese Regeln sollen so gewählt sein, dass sie den Begriff des gültigen Schlusses auf adäquate Weise charakterisieren, und zwar rein strukturell, also unabhängig von einem möglichen Beitrag der Bedeutung irgendwelcher Partikel oder anderer in Prämissen und Konklusion auftretender Ausdrücke. Da es sich um die Bestimmung des *Gültigkeits*begriffes handelt, verwende ich in den Sequenzen nicht das Zeichen »$\vdash$«, sondern »$\vDash$«. Ich nenne die semantischen Regeln für »$\vDash$« auch kurz die »$\vDash$-Regeln«. Die durch die $\vDash$-Regeln konstituierte Semantik nenne ich S($\vDash$).

In einem zweiten Schritt sollen dann die logischen Partikel *auf* S($\vDash$) *kontextuell definiert* werden. Was unter Kontextdefinitionen für logische Partikel genauer zu verstehen ist, erkläre ich später noch (Artikel (6)). Auf jeden Fall wird mir der definitorische Zusammenhang der Partikel mit der Folgerungsbeziehung erlauben, jene Auskünfte zu geben, die wir von einer Semantik für die Logik erwarten, aber von Kalkülen des Natürlichen Schließens und herkömmlichen Sequenzenkalkülen nicht erhalten konnten. So wird etwa durch die Definitionen sofort klar, dass es sich bei dem Zusammenhang der logischen Partikel mit der Implikationsbeziehung um eine semantische *Zurückführung* auf letztere handelt. Die Partikel lassen sich in gewissen inferenziellen Kontexten definieren, und damit (jedenfalls in diesen Kontexten) auch wieder eliminieren. Der einzige »Bedeutungsüberschuss« (wenn man so will), den die logischen Partikel gegenüber ihren Kontextdefinitionen besitzen, besteht darin, dass Formeln, welche die betreffenden Partikel enthalten, auch außerhalb der Kontexte, innerhalb welcher sie sich eliminieren lassen, als wohlgeformt gelten. Man möchte zunächst meinen, dass dies dazu führen muss, dass die Bedeutung (als Gebrauch) der logischen Partikel mit Bezug auf andere als die durch ihre Definitionen spezifizierten Kontexte unterbestimmt bleibt. Es wird sich aber herausstellen, dass dies nicht der Fall ist: Die Kontextdefinition einer logischen Partikel * stipuliert eine Doppelregel, welche ausreicht, um zusammen mit den $\vDash$-Regeln allein alle einschlägigen (*R)- und (*L)-Regeln für die betreffende Partikel als zulässig zu erweisen.

Dies erlaubt uns nun endlich eine Definition des Begriffs der logischen Partikel aus gebrauchstheoretischer Sicht, die in puncto Präzision nicht hinter der modelltheoretischen zurücksteht: Diejenigen Partikel heißen *logisch*, die kontextuell auf der Implikationsbeziehung definierbar sind oder sich allein über bereits verfügbare logische Partikel explizit definieren lassen.

Weiterhin macht die Einführung der logischen Partikel durch Definition nachträgliche Untersuchungen zur »Harmonie« von Partikelregeln überflüssig. Stattdessen zeigt man einfach die Vollständigkeit und Korrektheit des betreffenden Kalküls relativ zu der um die Partikeldefinitionen angereicherten Semantik S($\vDash$). Korrekte explizite Definitionen erweitern einen Satzbestand immer konservativ, und es lässt sich zeigen, dass dies auch für Kontextdefinitionen der von mir ins Auge gefassten Sorte gilt (siehe *On inferring*, §26). Hierdurch ist über einfache Konstruktionsmerkmale sichergestellt, dass die Semantik *selbst* keine »Harmoniedefekte« aufweist bzw. zulässt.

Schließlich haben Regelsemantiken der von mir vorgeschlagenen Art auch noch die Eigenschaft, dass sie zu prüfen gestatten, ob ein gegebenes Set von Partikeln expressive Adäquatheit erreicht. Dies ist genau dann der Fall, wenn sich jede *weitere* logische Partikel durch explizite Definition auf bereits verfügbare Partikel zurückführen ließe. Die expressiv adäquate Semantik für die Prädikatenlogik erster Stufe habe ich in *On inferring* »S($\underline{\mathrm{R3}}$)« genannt, die durch sie dargestellte Logik entsprechend »$\underline{\mathrm{R3}}$«. (Die Nummerierung hat mit der von mir in jenem Buch verwendeten Nomenklatur zu tun. Die Unterstreichung drückt die Einbeziehung von Quantoren aus.) Die Logik $\underline{\mathrm{R3}}$ werde ich im Verlauf dieses Beitrags noch aufbauen, auf den Nachweis ihrer expressiven Adäquatheit werde ich allerdings verzichten – siehe gegebenenfalls *On inferring* (§17, S. 190-S. 193, und §21, S. 238-241).

Im vorliegenden Abschnitt werde ich zunächst S($\vDash$) bereitstellen. Bevor ich hiermit beginne, möchte ich allerdings erst noch einen auf Carl Friedrich Gethmann (*Zur methodischen Ordnung regellogischer Kalkültypen*, in derselbe (Hrsg.): *Logik und Pragmatik. Zum Rechtfertigungsproblem logischer Sprachregeln*, 1982, 53-77, dort S. 57-60) zurückgehenden potenziellen Einwand sehr grundsätzlicher Art besprechen, der einen methodisch sekundären Status des Sequenzenkalkültyps gegenüber dem Kalkültyp des Natürlichen Schließens belegen soll. Der Einwand besteht im Kern in dem Verweis darauf, dass wir in der Praxis des Argumentierens von *Aussagen* auf *Aussagen* schließen, und nicht von Schlussformen auf Schlussformen. Das werde ich selbstverständlich nicht bestreiten. Als Kritik gegen das von mir gewählte Vorgehen wäre dieser Umstand aber nur dann schlagend, wenn das System, welches die *Semantik* der Logik bildet, aus methodischen Gründen zugleich als Kalkül für das formale

Schließen *selbst* zu dienen hätte. Nun habe ich im Verlauf dieses Abschnittes zu zeigen versucht, dass gerade diese Unterstellung auf einem Irrtum beruht und das Projekt einer gebrauchstheoretischen Semantikkonzeption vielmehr in Schwierigkeiten bringt, welche sie in wichtigen Punkten als der modelltheoretischen Konzeption unterlegen erscheinen lässt. Ich betone daher noch einmal, dass die Semantik für eine Logik *andere* Aufgaben zu erfüllen hat als ein Logikkalkül. Die klassische Trennung von (modelltheoretischer) Semantik und Logikkalkülen besteht insoweit zu Recht, als die Semantik in der Tat nicht zum *Schließen* selbst, sondern zum *Nachweis der Gültigkeit von Schlüssen* gedacht ist. Selbstverständlich macht eine Regelsemantik, wie sie mir hier vorschwebt, mit Blick auf $\vDash$ nur solche allgemeine Aspekte des gültigen Schlusses explizit, die sich in der Praxis des Argumentierens im Zusammenhang des Redesequenzen übergreifenden Umgangs mit semantischen Regeln für konkrete Ausdrücke immer schon implizit manifestieren. Die Regelsemantik beansprucht nicht, diese Aspekte allererst in die Praxis des Argumentierens *einzuführen*, sondern vielmehr sie auf methodische Weise explizit zu machen. Und da eine solche Explikation zwar eine Praxis des Schließens voraussetzt, nicht aber bereits konkrete Regeln für logische Partikel, stellt es auch keinen methodischen Zirkel dar, die logischen Partikel im Rahmen der Regelsemantik *auf* der Menge der $\vDash$-Regeln zu definieren und erst *nach* dem Aufbau der Regelsemantik S($\underline{\mathrm{R3}}$) einen mit Bezug auf sie vollständigen und korrekten Kalkül des Natürlichen Schließens N($\underline{\mathrm{R3}}$) aufzustellen. Man hat damit die Kalküle des Natürlichen Schließens von der von ihnen nicht tragbaren Bürde befreit, *zugleich* als Semantik für die durch sie jeweils kalkülisierte Logik dienen zu müssen.

Die Syntax der in der Regelsemantik behandelten Figuren entspricht der gängiger Sequenzenkalküle. Das heißt, prädikatenlogische Formeln sind wie üblich aufgebaut, und Implikationen aus Formeln, Kommata und »$\vDash$« derart, dass auf der linken Seite endlich viele (also eventuell auch null) durch Kommata abgetrennte Prämissen zu stehen kommen, während sich auf der rechten Seite genau eine Formel findet. (Gegen die aus einer Perspektive formaler Symmetrie naheliegende Idee, auch auf der *rechten* Seite von $\vDash$ mehrere Formeln zuzulassen, siehe gegebenenfalls *On inferring*, §26, S. 384-386.)

Nun ist eine Regelsemantik zwar keine Interpretationssemantik wie die Modelltheorie, gleichwohl muss aber auch sie auf irgendeine Weise zwischen Wahrheit und Falschheit unterscheiden können. Der Fall der Wahrheit ist implizit dadurch berücksichtigt, dass Implikationsaussagen letztlich besagen, dass die Wahrheit der links von »$\vDash$« stehenden Formeln die Wahrheit der rechts von »$\vDash$« stehenden Formel garantiert. Die logische Wahrheit einer

Formel kann damit einfach durch eine prämissenlose Implikation mit dieser Formel als Konklusion ausgedrückt werden. Um auch die Falschheit berücksichtigen zu können, benötigen wir in einer Regelsemantik eine propositionale Konstante »f«, deren Bedeutung dadurch bestimmt sein möge, dass f von einer Aussage *A* genau dann impliziert wird, wenn *A* falsch ist. Die Konstante »f« bedeutet damit »etwas Falsches«. (Aus dem Rückblick einer Perspektive, in der man bereits über den Adjunktor »$\vee$« verfügt, erweist sich f damit gleichsam als die Adjunktion aller falschen Aussagen.) Der Grund, warum ich nicht auf das Zeichen »⅄« (»das Absurde«) zurückgreife, ist der, dass dieses traditionell den engeren Begriff »ein Widerspruch« bedeuten soll. Das ist philosophisch signifikant, auch wenn sich »f« und »⅄« im Rahmen formaler Logikkalküle in ihrem Verhalten gar nicht unterscheiden: Denn nicht alle falschen Aussagen implizieren (für sich allein genommen) auch schon einen Widerspruch.

Ich werde nunmehr die $\models$-Regeln für die Semantik S($\models$) auflisten und im Anschluss einzeln erläutern und motivieren:

$\mathfrak{A} \models \mathfrak{A}$		(Selbstimplikation)
$\Sigma,\Gamma,\Theta,\Pi \models \mathfrak{C} \Rightarrow \Sigma,\Theta,\Gamma,\Pi \models \mathfrak{C}$		(Vertauschung)
$\Sigma,\Pi,\Pi \models \mathfrak{C} \Rightarrow \Sigma,\Pi \models \mathfrak{C}$		(Zusammenziehung)
$\Sigma \models \mathfrak{A};\ \mathfrak{A},\Pi \models \mathfrak{B} \Rightarrow \Sigma,\Pi \models \mathfrak{B}$		(Schnitt)
$\Sigma \models \mathfrak{A} \Rightarrow \Sigma \models \mathfrak{A}\mathfrak{c}/\mathfrak{d}$	$\vert \mathrm{N}\mathfrak{c}\Sigma$	(Substitution rechts)
$\Sigma,\mathfrak{A} \models \mathfrak{C} \Rightarrow \Sigma,\mathfrak{A}\mathfrak{c}/\mathfrak{d} \models \mathfrak{C}$	$\vert \mathrm{N}\mathfrak{c}\Sigma;\ \mathrm{N}\mathfrak{c}\mathfrak{C}$	(Substitution links)

Selbstimplikation: Ein Argument, das eine Aussage durch diese selbst stützt, ist zwar zirkulär (und damit schlecht), gleichwohl ist die Schlussform der Selbstimplikation aber gültig, weil beim Schluss von einer Aussage auf diese selbst banalerweise sichergestellt ist, dass alle Instanzen der Schlussform bei wahren Prämissen auch eine wahre Konklusion aufweisen. Ich nehme an, dass dies keiner weiteren Diskussion bedarf.

Vertauschung: Auch dies sollte unkontrovers sein. Verschiedene Möglichkeiten, die Prämissen eines Schlusses anzuordnen, mögen sich mit Blick auf Übersichtlichkeit unterscheiden, für die Gültigkeit oder Ungültigkeit des Schlusses spielt das aber keine Rolle. Von Interesse dürfte die Bemerkung sein, dass erst Vertauschung sicherstellt, dass alle Varianten der Regeln Zusammenziehung, Schnitt und linker Substitution untereinander jeweils gleichwertig sind (und damit im Folgenden nicht eigens Berücksichtigung finden müssen).

Zusammenziehung: Wie bereits weiter oben festgelegt, stehen die großen griechischen Buchstaben für *Listen* von Formeln, also nicht für Mengen. Im

Unterschied zu Mengen können Listen mehrere Instanzen ihrer »Elemente« enthalten – so wie in einem Text mehrere Instanzen desselben Satzes auftreten können. Dass eine Schlussform gültig ist, deren Prämissenliste *n* Instanzen derselben Formel enthält, bedeutet nichts anderes, als dass man im Rahmen einer Kette gültiger Schlüsse, die von den Prämissen zur Konklusion führt, *n* Instanzen der Formel heranziehen kann. Die semantische Regel der Zusammenziehung besagt nun, dass man in einem solchen Fall genauso gut *n*-mal auf *dieselbe Instanz* der Formel zurückgreifen darf. Auch dies sollte unkontrovers sein, insofern man ja in beiden Fällen im folgenden Sinne »dasselbe« tut: man bezieht sich *n*-mal auf den durch die Formel bzw. ihre Instanzen repräsentierten Sachverhalt. (Für eine ausführlichere Diskussion siehe *On inferring*, §10, S. 117f. und §27, S. 403-409.) In meiner Explikation der Zusammenziehungsregel habe ich implizit bereits Gebrauch gemacht von

Schnitt: Schnitt ist letztlich nichts anderes als die Transitivität gültigen Schlussfolgerns, die sich im einfachsten Fall so ausdrückt: Wenn der Schluss von $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{B}$ für alle wahren Instanzen von $\mathfrak{A}$ wieder wahre Instanzen von $\mathfrak{B}$ ergibt, und der Schluss von $\mathfrak{B}$ auf $\mathfrak{C}$ für alle wahren Instanzen von $\mathfrak{B}$ wahre Instanzen von $\mathfrak{C}$, dann ergibt auch der Schluss von $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{C}$ für alle wahren Instanzen von $\mathfrak{A}$ wahre Instanzen von $\mathfrak{C}$. Schnitt ist einfach bloß die Erweiterung dieses Sachverhaltes auf Schlüsse mit mehreren Prämissen: Wenn die beiden Schlüsse von Σ auf $\mathfrak{A}$, und von $\mathfrak{A}$ und Π auf $\mathfrak{B}$ wahrheitsvererbend sind, dann ist auch der Schluss von Σ und Π auf $\mathfrak{B}$ wahrheitsvererbend. Ich behaupte, dass Schnitt den *semantischen Kern* des Begriffs des gültigen Schlusses ausmacht, sodass Ansätze, die gewisser Probleme dadurch Herr zu werden versuchen, dass sie die Transitivität der Ableitbarkeitsbeziehung technisch beschränken, semantisch defekt sind (siehe etwa meine Diskussion von Neil Tennants System IR in *On inferring*, §5, S. 39f.).

Rechte und linke Substitution: Im Unterschied zu den anderen $\models$-Regeln findet man diese beiden Regeln in der Literatur (meines Wissens nach) sonst nicht. Man braucht sie jedoch, weil sie einen wichtigen Aspekt des Verhaltens von Individuenkonstanten in gültigen Schlüssen betreffen, dessen Berücksichtigung für die spätere Definition der Quantoren unverzichtbar ist. Ich schreibe $\mathfrak{A}\mathfrak{c}/\mathfrak{d}$ für die Formel, die entsteht, wenn man in $\mathfrak{A}$ die Konstante $\mathfrak{c}$ an allen Stellen durch $\mathfrak{d}$ ersetzt. Die beiden Regeln besitzen Anwendungsbedingungen wie $\mathrm{N}\mathfrak{c}\Sigma$, $\mathrm{N}\mathfrak{c}\mathfrak{C}$, die so zu lesen sind: »$\mathfrak{c}$ kommt in Σ (bzw. $\mathfrak{C}$) nicht vor«. Auch wenn diese Bedingungen buchstäblich nur »am Rande« erscheinen (einfach deshalb, weil es sich nicht um Figuren des Kalküls handelt), sind sie doch das, worum es sich bei gültigen Substitutionen von Konstanten eigentlich dreht. Was die beiden Substitutionsregeln zusammengenommen besagen, ist dies: Wenn in einer gültigen Schlussform eine Individuenkonstante in nur *einer* Formel auftritt, dann ist das Auftreten gerade *dieser* Konstante an der betreffenden Stelle ganz unwesentlich und ihre Ersetzung durch eine beliebige andere Konstante ergibt wieder eine gültige Schlussform.

(5) Warum eine adäquate Regelsemantik der Implikation zu einer Relevanzlogik führt

Hätte ich zu S($\models$) noch die Regel

$$\Sigma \models \mathfrak{C} \Rightarrow \Sigma, \Pi \models \mathfrak{C} \qquad \text{(Verdünnung)}$$

hinzugefügt, dann entspräche $\models$ dem üblichen Gültigkeitsbegriff, wie er etwa der Klassischen, Intuitionistischen und Minimalen Logik zugrunde liegt. In der folgenden Diskussion referiere ich auf solche Logiken als »Standardlogiken« – das ist im Kontext der $\models$–Regeln angemessen, auch wenn die Minimallogik und die Intuitionistische Logik mit Bezug auf andere Aspekte typische Nicht-Standardsysteme darstellen.

Selbstverständlich ließe sich durch Hinzunahme von Verdünnung zu den $\models$-Regeln eine Relation zwischen Formelmengen und Formeln definieren, dabei handelte es sich dann aber *nicht* um die Implikation. Ich möchte mit dieser Bemerkung keineswegs darauf hinaus, dass der Begriff des gültigen Schlusses (im Sinne nicht-monotoner Logiken) so zu fassen sei, dass auch solche Schlüsse unter ihn fallen, die im Lichte neu hinzukommender Information (also weiterer Prämissen) gegebenenfalls *zurückgenommen* werden müssen. Wenn $\mathfrak{A}$ aus Annahmen Σ folgt, dann bleibt der Schluss von Σ auf $\mathfrak{A}$ auch im Kontext weiterer Annahmen Π gültig. Anders ausgedrückt: Was *aus* Annahmen folgt, das folgt aus *diesen* Annahmen auch *unter* zusätzlichen weiteren Annahmen. Das ist die Eigenschaft der *Monotonie*, und sie wird von unserer Gültigkeitsrelation $\models$ voll erfüllt. Allerdings darf Monotonie nicht mit Verdünnung verwechselt werden, welche etwas ganz anderes besagt, nämlich dass, was *aus* Annahmen folgt, auch *aus* einer um beliebige Zusatzannahmen *erweiterten* Annahmenmenge folgt. Letzteres ist nicht richtig, da die zusätzlichen Annahmen für die Folgerung gänzlich irrelevant sein können.

Leider wird in der Literatur zwischen Monotonie und Verdünnung nicht unterschieden, und daher rührt die herrschende Auffassung, Verdünnung sei ein triviales Merkmal des Begriffs der logischen Folge selbst. Man könnte meinen, dass es sich hierbei schlimmstenfalls um eine harmlose Ungenauigkeit handelt. Dem ist aber ganz und gar nicht so: Die Inkorporation von Verdünnung in die Standardlogiken sorgt dafür, dass diese Systeme die der Logik zugedachte Aufgabe – die Evaluation von Argumenten auf ihre formale Gültigkeit hin – letztlich nicht bewältigen können. Hinweise hierauf manifestieren sich in typischen Störungen logischer Analysen. Diese haben keineswegs Seltenheitswert, werden jedoch in aller Regel schlicht verdrängt: Im Logikunterricht spricht man sie entweder gar nicht erst an, oder man spielt sie herunter und vermeidet in den Übungen problematische Formalisierungsaufgaben mehr oder weniger bewusst. Dies rächt sich später bei der Anwendung auf konkrete philosophische Argumentationszusammenhänge, wo man immer wieder in Scheinprobleme gerät.

Ich werde im Folgenden einige Beispiele für Implikationen angeben, die nur auf dem Hintergrund von Verdünnung als »gültig« ausweisbar sind, und deren Anwendung typische Scheinprobleme aufwirft. Aus Platzgründen werde ich dabei darauf verzichten, jeweils konkret aufzuzeigen, *wie* die betreffenden Implikationen auf Verdünnung basieren. Für einige der Beispiele werde ich dies später in Artikel (6) en passant nachholen – die übrigen Fälle kann man sich dann bei Bedarf per analogiam selbst herleiten. Außerdem werde ich mich auf die Klassische Logik beschränken. Das bedeutet, dass manche der im Folgenden aufgeführten Schlussformen ihre »Gültigkeit« einer *Interaktion* von Verdünnung und TND verdanken. Gleichwohl stellen Intuitionistische Logik und Minimallogik keinen Ausweg dar, da sich in ihnen jeweils immer *Varianten* der betreffenden Implikationen (mit gleichermaßen desaströsen Konsequenzen) ausweisen lassen. In diesem Zusammenhang ist zudem zu bedenken, dass, auch wenn TND nicht universell gültig ist, doch gleichwohl eine beträchtliche Zahl wertdefiniter Diskurs*bereiche* existiert, sodass TND und äquivalente Prinzipien zumindest *lokal* Gültigkeit für sich beanspruchen dürfen. Auf dem Hintergrund von Verdünnung träten die zu besprechenden Schwierigkeiten dann aber zumindest in allen wertdefiniten Bereichen in vollem Umfang auf, selbst wenn die bereichs-*unabhängig* gültigen Schlussprinzipien allein durch die Intuitionistische Logik oder die Minimallogik gegeben wären. Für eine ausführliche Diskussion (die auch gegebenenfalls für die Intuitionistische oder Minimale Logik einschlägige Implikationsvarianten berücksichtigt) verweise ich auf *On inferring* (§3, §6 und §7). Wir betrachten nun die folgenden, klassisch allesamt gültigen Implikationen:

(1) $\mathfrak{B} \models \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$
(2) $\neg\mathfrak{A} \models \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$
(3) $\neg(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}) \models \mathfrak{A} \wedge \neg\mathfrak{B}$
(4) $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}, \mathfrak{C} \to \mathfrak{D} \models (\mathfrak{A} \to \mathfrak{D}) \vee (\mathfrak{C} \to \mathfrak{B})$
(5) $\models (\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}) \vee (\mathfrak{B} \to \mathfrak{C})$
(6) $\bigwedge \mathfrak{x} \mathfrak{A} \to \mathfrak{B} \models \bigvee \mathfrak{x} (\mathfrak{A} \to \mathfrak{B})$

Implikationen (1) und (2) besagen, dass Subjunktionen mit wahrem Sukzedens (Nachsatz) oder falschem Antezedens (Vordersatz) wahr sind. Sie gelten auch in der Intuitionistischen Logik. In der Minimallogik gilt (1) ebenfalls uneingeschränkt und (2) zumindest für negiertes $\mathfrak{B}$. Bei (1) und (2) handelt es sich um die wesentlichen Eigenschaften der sogenannten »materialen« Subjunktion. Sie entsprechen einigermaßen offensichtlich nicht der Semantik von »wenn-dann« im Rahmen üblicher lebensweltlicher oder wissenschaftlicher Argumentation, welche das Wahrheitskriterium für Subjunktionen vielmehr darin sieht, dass sich das Sukzedens (eventuell im Kontext weiterer Annahmen) mithilfe des Antezedens begründen lässt. Der Wahrheitswert der Teilsätze ist dabei völlig unerheblich bzw. findet nur insofern oberflächengrammatisch Berücksichtigung, als wir kontrafaktische Teilaussagen gerne konjunktivisch formulieren.

Je nachdem welches Logikbuch man konsultiert, wird das semantische Abweichen des materialen Subjunktors von »wenn-dann« entweder ignoriert oder (mehr oder weniger ausführlich) zu verteidigen versucht. Eine beliebte, aber bei näherem Hinsehen ziemlich schwache Rechtfertigungsstrategie gründet auf der Behauptung, dass von der »logischen« abweichende Verwendungsweisen von »wenn-dann« immer einen zusätzlichen *kausalen* Zusammenhang der Teilsätze ins Spiel brächten. Das lässt sich gut am beliebten Unterrichtsbeispiel

»Wenn es regnet, ist die Straße nass.«

erläutern. Sofern hier implizit mitgemeint ist, dass die Straße *vom Regen* nass wird, ist diese Aussage in der Tat nicht schon dann wahr, wenn es nicht regnet oder wenn die Straße nass ist. Trotzdem hilft eine solche Beobachtung am Ende nicht viel, da man schließlich auch Aussagen über akausale Bedingungsgefüge wie zum Beispiel

»Wenn nicht Fichte, sondern Kant die *Grundlage der gesamten Wissenschaftslehre* geschrieben hat, dann ist Kant der beste Philosoph aller Zeiten.«

nicht bloß deshalb schon als wahr einstufen würde, weil das Antezendens falsch ist.

Auf Paul Grice (*Studies in the way of words*, Part I) geht die Auffassung zurück, dass natürlichsprachliche Wenn-Dann-Aussagen zwar ganz im Sinne materialer Subjunktionen *wahr* sind, wenn das Antezedens falsch oder das Sukzedens wahr ist, man sie allerdings gleichwohl nur dann *behaupten* darf, wenn man nicht schon weiß, *welche* Teilsätze wahr sind. Sonst verstößt man nämlich gegen die Konversationsmaxime »Sei so informativ wie möglich!«. Ich halte diese, sich in der Analytischen Sprachphilosophie großer Beliebtheit erfreuende Verteidigungsstrategie für wenig überzeugend, weil man ja etwa mit Blick auf das gerade genannte Beispiel durchaus darüber streiten kann, ob die Subjunktion wahr ist oder nicht, auch wenn man sich ganz einig ist, dass die Annahme des Antezedens kontrafaktisch wäre, weil Fichte (und nicht Kant) die *Wissenschaftslehre* geschrieben hat. Ich möchte jedoch auf diesem Punkt nicht herumreiten, sondern stattdessen darauf hinweisen, dass Probleme mit den im Folgenden noch zu besprechenden Implikationen (3), (5) und (6) schon deshalb nicht unter Bezug auf Grice gelöst werden können, weil deren Konklusionen weder Subjunktionen sind (sondern solche gegebenenfalls nur eingebettet als Teilaussagen enthalten) noch aus klassischer Sicht logisch schwächer ausfallen als möglich. Die Prämissen von (4) erlauben zwar klassisch stärkere Konklusionen (und (4) wäre klassisch darüber hinaus auch dann gültig, wenn man sich auf eine der beiden Prämissen beschränkte), wir werden aber gerade an diesem Beispiel besonders deutlich sehen, dass materiale Subjunktionen und »Wenn-Dann-Aussagen« sich tatsächlich bezüglich ihrer *Wahrheitswerte* unterscheiden können, also nicht bloß gelegentlich Wahrheit und konversationelle Behauptbarkeit auseinanderfallen. Daraus folgt dann, dass der von Grice und seinen Anhängern geleugnete Bedeutungsunterschied zwischen materialem Subjunktor und »wenn-dann« letzten Endes doch nicht wegzudisputieren ist.

Die vergleichsweise beste Rechtfertigungsstrategie für den materialen Subjunktor scheint mir darin zu bestehen, zunächst darauf hinzuweisen, dass er mit »wenn-dann« die folgenden drei Eigenschaften *teilt*:

$\mathfrak{A}, \mathfrak{A} \to \mathfrak{B} \models \mathfrak{B}$	(Modus Ponens)
$\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}, \neg\mathfrak{B} \models \neg\mathfrak{A}$	(Modus Tollens)
$\mathfrak{A} \wedge \neg\mathfrak{B} \models \neg(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B})$	(Falsifikation)

Im Anschluss behauptet man dann, dass dies den semantischen Kern von »wenn-dann« ausmache und ausreiche, um den materialen Subjunktor zur adäquaten Formalisierung insbesondere wissenschaftlicher Argumente benutzen zu können. Dem gegenüber seien die Abweichungen trotz ihrer Ungewöhnlichkeit letztlich unschädlich und verdankten sich auch nur dem logisch-mathematischen Bestreben nach Einfachheit und Eleganz der Darstellung.

Das wäre alles ganz in Ordnung, wenn es denn nur *wahr* wäre, dass die Bedeutungsabweichung des materialen Subjunktors für die Formalisierung und Evaluation von Argumenten unschädlich ist. Dass dies jedoch keineswegs der Fall ist, kann man an philosophischen Problemen wie dem der Definierbarkeit von Dispositionsprädikaten oder der formalen Darstellung kontrafaktischer Konditionalaussagen sehen. In beiden Fällen führen die jeweils naheliegenden Definitions- bzw. Formalisierungsvorschläge zu »paradoxen« (im Sinne von unerwünschten) Resultaten – etwa dem, dass ein Gegenstand, der nie im Wasser liegt, wasserlöslich ist, oder dem, dass es allen besser ginge, wenn ich Bundeskanzler *wäre*, bloß weil ich nicht Bundeskanzler *bin*. Seit man sich dieser Schwierigkeiten bewusst wurde, haben die Ansätze zu ihrer Lösung an Kompliziertheit stetig zugenommen, ohne dass bis heute auch nur in Annäherung Einvernehmen hergestellt werden konnte. Meine Diagnose ist die, dass es sich bei den genannten (und vielen anderen ähnlich gelagerten) Problemen in Wirklichkeit um Scheinprobleme handelt, die nicht in der Sache selbst begründet liegen, sondern vielmehr allein der Inadäquatheit des verwendeten Analysewerkzeugs geschuldet sind. In einer Logik ohne Verdünnung könnte man nämlich zur Definition von Dispositionsprädikaten oder zur Formalisierung kontrafaktischer Konditionalaussagen einfach und problemlos auf die intuitiv nächstliegenden Vorschläge zurückgreifen, die historisch bloß deshalb verworfen werden mussten, weil sie *auf der Basis von Standardlogiken* von wahren Prämissen auf falsche Konklusionen geführt hatten (siehe *On inferring*, §6, S. 57-63).

Werfen wir nun einen Blick auf die klassische Implikation (3). Sie bringt zum Ausdruck, dass die Falschheit einer Subjunktion hinreichend sowohl für die Wahrheit ihres Antezedens als auch die Falschheit ihres Sukzedens ist. Das führt zu einem »Paradox der unzureichenden Bedingung«, welches man etwa an folgendem Beispiel illustrieren kann: Die Behauptung

»Wenn der Geist unverkörpert existieren kann, dann hat der Materialismus Recht.«

ist mit Sicherheit *falsch*. Schließlich handelt es sich beim Antezedens dieser Subjunktion gerade um eine Aussage, die der Materialismus bestreitet. Mit

G: Der Geist kann unverkörpert existieren.
M: Der Materialismus hat Recht.

wäre die Falschheit der betreffenden Wenn-Dann-Aussage so zu formalisieren:

$\neg(G \rightarrow M)$

Daraus folgt nach (3) aber sowohl G als auch $\neg M$, und damit haben wir dann »bewiesen«, dass der Geist unverkörpert existieren kann und der Materialismus falsch ist. Aber freilich stimmt hier irgendetwas nicht – schließlich könnten wir ja ganz analog (etwa über die Falschheit von $M \rightarrow G$) auch das genaue Gegenteil zeigen. Wie ist die Situation also einzuschätzen? Nun, wir haben aus einer wahren Aussage auf eine (zumindest möglicherweise) falsche geschlossen, und das ist eigentlich ein charakteristisches Kennzeichen für die Ungültigkeit der betreffenden Schlussform. Ein Vertreter der Klassischen Logik wird hier selbstverständlich einwenden, dass es sich bei gültiger Schlussform vielmehr um ein charakteristisches Kennzeichen dafür handelt, *dass inkorrekt formalisiert wurde*. Er ist dann allerdings in der Pflicht darzulegen, wie die korrekte Formalisierung von Aussagen auszusehen hätte, welche zum Ausdruck bringen, dass das Bestehen eines bestimmten Sachverhaltes für das Bestehen eines bestimmten anderen nicht hinreicht. Man beachte, dass beispielsweise $G \rightarrow \neg M$ als Alternative ausscheidet, auch wenn die betreffende Aussage mit Blick auf unser Beispiel zufälligerweise wahr ist. Man betrachte dazu etwa das Gegenbeispiel

»Wenn meine Nase juckt, dann gewinne ich im Lotto.«

aus dessen Falschheit ja keineswegs folgt, dass im Fall des Juckens meiner Nase meine Gewinnchancen auf Null sinken.

Mag man die Frage der Formalisierung von Aussagen über die Unzureichendheit von Bedingungen noch als randständiges Spezialproblem abtun, so stellt sich die Frage, wie man auf dem Boden Klassischer Logik korrekt formalisiert, mit Blick auf die nächste Implikation (4) in einer ungemütlich verallgemeinerten Form: Bei der Implikation (4) handelt es sich um das Paradox von William S. Cooper (*The propositional logic of ordinary discourse*, in: Inquiry, 1968, 11, 295-320). Gegeben seien zwei Aussagen wie etwa

»Wenn John in Paris ist, dann befindet er sich in Frankreich.«
»Wenn John in Istanbul ist, dann befindet er sich in der Türkei.«

Nicht nur sind diese Aussagen in punkto Klarheit und Wahrheit geradezu vorbildlich, wir dürfen auch davon ausgehen, dass sie in jedem Logikkurs ohne Umschweife mittels der Variablenbelegung

A: John ist in Paris.
B: John befindet sich in Frankreich.
C: John ist in Istanbul.
D: John befindet sich in der Türkei.

auf die folgende Weise formalisiert werden würden:

$A \longrightarrow B$
$C \longrightarrow D$

Daraus folgt nun aber via (4) unmittelbar $(A \longrightarrow D) \vee (C \longrightarrow B)$, in *Rückübersetzung* also:

»Wenn John in Paris ist, dann befindet er sich in der Türkei, oder, falls er in Istanbul ist, dann befindet er sich in Frankreich.«

Da beide Adjunktionsglieder offensichtlich im üblichen Verständnis von »wenn-dann« nicht nur »nicht behauptbar«, sondern glatt falsch sind, ist auch die Adjunktion selbst falsch. Wir haben somit aus unzweifelhaft wahren Prämissen eine ebenso unzweifelhaft falsche Konklusion hergeleitet. Darüber hinaus ist nicht zu sehen, was man bei der Formalisierung der Prämissen falsch gemacht haben sollte. Vielmehr lässt sich zu allem Überfluss leicht erkennen, dass man für *beliebige* unter Verwendung des materialen Subjunktors formalisierte Wenn-Dann-Aussagen eine »passende« Wenn-Dann-Aussage finden kann, sodass sich eine Instanz des Cooperschen Paradoxons ergibt – etwa für »Wenn es regnet, ist die Straße nass« die Aussage »Wenn es lange nicht geregnet hat, sind die Felder trocken«. Will man auf diesem Hintergrund weiter darauf bestehen, dass die Klassische Logik mit Bezug auf die Menge der gültigen Schlussformen nicht übergeneriert, so ist das zwar widerspruchsfrei möglich – aber nur unter dem Zugeständnis, dass sich nicht bloß (wie allseits großzügig zugebilligt wird) *vereinzelte* natürlichsprachliche Wenn-Dann-Aussagen mithilfe des materialen Subjunktors nicht korrekt formalisieren lassen: Es geht mit *keinen*.

Eigentlich bräuchte es über (4) hinaus keiner weiteren Beispiele mehr – jedenfalls nicht, sofern Einigkeit darüber besteht, dass die Aufgabe der formalen Logik in der Evaluation natürlichsprachlicher Argumente (in lebensweltlichen wie wissenschaftlichen Kontexten) besteht. Um aber wenigstens anzudeuten, dass die Klassische Logik mitnichten nur an einer *einzigen* problematischen Schlussform krankt, sondern vielmehr durch und durch verdorben ist, möchte ich zwei weitere Fälle betrachten (für noch weitere siehe *On inferring*, §6 und §7). Richten wir unsere Aufmerksamkeit also nun auf die Tautologie (5). Sie besagt, dass für *jede* Aussage B gilt, dass es mit Bezug auf *beliebig* gewählte Aussagen A und C der Fall ist, dass A hinreichend für B, oder B hinreichend für C ist. Eine Instanz hiervon wäre etwa:

»Wenn der Geist unverkörpert existieren kann, dann ist der Materialismus richtig, oder wenn der Materialismus richtig ist, dann sind die Relativitätstheorie, die Quantenmechanik und die Darwinsche Evolutionstheorie allesamt falsch.«

Perfide, aber klassisch korrekt, könnte man von hier aus folgendermaßen weiter schließen: Da das erste Adjunktionsglied – wie wir oben schon festgestellt hatten – definitiv falsch ist, muss das zweite Adjunktionsglied (per Disjunktivem Syllogismus) wahr sein. Es folgt also, dass, falls der Materialismus richtig ist, Relativitätstheorie, Quantenmechanik und Evolutionstheorie allesamt falsch sein müssen – was den Materialismus ordentlich zu diskreditieren scheint. Freilich ist das wieder Unfug. Es geht mir hier aber auch nur darum, in aller Deutlichkeit aufzuzeigen, wie hoffnungslos unbrauchbar Standardlogiken zur Formalisierung und Evaluation natürlichsprachlicher Aussagen und Argumente sind.

Am Ende möge Implikation (6) noch zeigen, dass die verheerende Wirkung von Verdünnung auch auf die Quantorenlogik übergreift: Man betrachte als Beispiel die Aussage

»Wenn alle mir einen Euro geben, dann bin ich reich.«

Mit

A^2: _ gibt … einen Euro
R^1: _ ist reich
c: ich

erhalten wir die Formalisierung

$\bigwedge x Axc \rightarrow Rc$

Hieraus folgt per (6) aber sofort:

$\bigvee x(Axc \rightarrow Rc)$

Es gibt also jemanden, sodass gilt: Wenn *er* mir einen Euro gibt, dann bin ich reich!

Aus all dem ist die folgende Lehre zu ziehen: Soll die Logik ihre Aufgabe als Mittel zur Evaluation natürlichsprachlicher Argumente erfüllen, dann darf ihr Implikationsbegriff nicht »verdünnt« sein. Eine Logik, deren Implikationsbegriff Selbstimplikation, Vertauschung, Zusammenziehung und Schnitt erfüllt, aber *nicht* Verdünnung, nennt man eine *Relevanzlogik*. Dieser Titel rührt daher, dass die Unzulässigkeit von Verdünnung sicherstellt, dass in einem gültigen Schluss die Prämissen für die Konklusion in dem Sinne »relevant« sind, dass man sie im Verlauf einer Herleitung alle (zusammen) benutzen kann. (Man beachte, dass dies nicht heißt, dass in einem gültigen Schluss jede Prämisse für die Herleitung der Konklusion *unverzichtbar* sein muss – siehe hierzu *On inferring*, §8.)

Der klassische Implikationsbegriff (also *inklusive* Verdünnung) ist »maximal konsistent« in dem Sinne, dass er durch jede echte Erweiterung trivialisiert würde. Um sicherzustellen, dass die Semantik S($\models$) den Begriff der Implikation korrekt bestimmt, müssen wir daher nur noch zeigen, dass *unterhalb* von Verdünnung keine weitere (schwächere) $\models$-Regel existiert, welche die Bedeutung von »$\models$« auf adäquate Weise »vervollständigen« würde. Der einzige diesbezüglich zu untersuchende Kandidat ist die sogenannte »Prämissenwiederholung«

$$\Sigma,\mathfrak{A} \models \mathfrak{B} \Rightarrow \Sigma,\mathfrak{A},\mathfrak{A} \models \mathfrak{B} \qquad \text{(Prämissenwiederholung)}$$

Prämissenwiederholung ist gewissermaßen die Konverse zur Kontraktion. Sie lässt sich allerdings nicht auf analoge Weise rechtfertigen: Zwar ist der Rückgriff auf *n* Instanzen einer Formel immer dem *n*-maligen Rückgriff auf *dieselbe* Instanz der betreffenden Formel äquivalent, jedoch nicht gleichermaßen auch der Rückgriff auf eine Instanz dem Rückgriff auf *mehr* als eine. Vielmehr hängt dies in jedem einzelnen Fall schon davon ab, wie oft es möglich ist, beim Beweis der Konklusion auf die betreffende Formel zurückzugreifen. Und so ist es auch nicht überraschend, dass eine Logik, die sich von der Klassischen Logik *nur* dadurch unterscheidet, dass anstatt Verdünnung bloß Prämissenwiederholung zugelassen ist, noch immer Theoreme generiert, die diese Logik zur Evaluation natürlichsprachlicher Argumente untauglich machen, etwa die folgende Spezifikation von (5):

$$(5^*)\ \models (\mathfrak{A}\rightarrow\mathfrak{B})\vee(\mathfrak{B}\rightarrow\mathfrak{A})$$

Zur Veranschaulichung verwende ich – in unwesentlicher Abwandlung – ein Beispiel von Stephen Read (*Relevant logic: A philosophical examination of* *inference*, 1988, 2.3). Wir denken uns eine Situation, in der Peter behauptet, dass noch Milch im Kühlschrank ist, während Paul ebendies bestreitet. Mit

A: Peter hat Recht.
B: Paul hat Recht.

ergibt (5*) sofort die falsche Instanz

»Wenn Peter Recht hat, dann auch Paul, oder wenn Paul Recht hat, dann auch Peter.«

(6) Die (kontextuelle) Definition der logischen Partikel auf der Menge der $\vDash$-Regeln

In gewisser Weise ist S($\vDash$) bereits die ganze Logik. Denn die logischen Partikel können nun durch *Definition* auf der Implikationsrelation eingeführt werden. Allerdings handelt es sich hier nicht um übliche explizite Definitionen, sondern um *Kontextdefinitionen*. So wie explizite Definitionen, stipulieren auch Kontextdefinitionen semantische Doppelregeln, die also von links nach rechts und *vice versa* gelten. Der Kontext der von mir intendierten Definitionen für logische Partikel wird der von Implikationsschemata sein, das heißt, die Definitionen werden Doppelregeln zwischen Implikationen stipulieren. Da das Definiens dabei gelegentlich mehrere, durch Semikola getrennte Implikationsschemata $I_1;\ldots;I_n$ enthalten kann, muss ich zunächst festlegen, dass eine Regel der Form

$I \Rightarrow I_1;\ldots;I_n$

eine Abkürzung für die *n* Regeln

$I \Rightarrow I_1$
.
.
.
$I \Rightarrow I_i$
.
.
.
$I \Rightarrow I_n$

darstellen soll. Damit stipuliert also die Kontextdefinition

$$I(*) \leftrightharpoons I_1;\ldots;I_n$$

einer logischen Partikel * insgesamt *n*+1 Regeln.

Prinzipiell stehen auch Kontextdefinitionen unter den gegen Ende von §11 (4) genannten fünf Bedingungen für korrekte explizite Definitionen, wobei freilich die *erste* Bedingung gelockert werden muss, um Raum für Kontextsymbole zu schaffen. Sie lautet dann angepasst folgendermaßen:

1) Von dem zu definierenden atomaren (also syntaktisch nicht zerlegbaren) Ausdruck abgesehen, enthält das Definiendum neben ungebundenen Variablen und Hilfssymbolen (wie Kommata und Klammern) nur noch ein weiteres Symbol: ein Kontextsymbol, das im Definiendum *und* im Definiens vorkommen muss.

Warum das Kontextsymbol sowohl im Definiendum als auch im Definiens vorzukommen hat, ist klar: Träte es nicht im Definiendum auf, dann hätten wir keine Kontextdefinition, sondern eine explizite Definition. Käme es im Definiens nicht vor, so wäre der zu definierende Ausdruck nicht im Kontext definiert. Vielmehr würden (auf unzulässige Weise) *sowohl* der Ausdruck *als auch* das Kontextsymbol gleichzeitig *explizit* definiert.

Da ich logische Partikel im speziellen Kontext von Implikationsschemata zu definieren beabsichtige, und dabei (wie bereits bemerkt) im Definiens *mehrere*, durch Semikolon getrennte, Implikationsschemata auftreten können, müssen über die Forderungen 2)-5) an explizite Definition hinaus zur Vermeidung von Kreativität speziell noch folgende weitere spezifische Vorsichtsmaßnahmen getroffen werden:

6) Das Kontextsymbol $\vDash$ muss in *allen* durch Semikolon abgetrennten Figurenschemata des Definiens auftauchen. Anders ausgedrückt: Die durch Kontextdefinition stipulierten Regeln sollen immer nur von Implikationen zu Implikationen führen.
7) Im Definiendum (und damit also nach Bedingung 2) auch im Definiens) darf nur *eine* Listenvariable vorkommen. Diese muss in *allen* Implikationsschemata des Definiens auftreten.
8) Im Definiendum dürfen nur Formelvariablen auftreten, die Argumente der zu definierenden Partikel sind, es sei denn, die Partikel wird mit Bezug auf ihr Auftreten links von $\vDash$ definiert. Die in diesem

Fall rechts von $\vDash$ auftretende, weitere Formelvariable muss in *allen* Implikationsschemata des Definiens (rechts von $\vDash$) vorkommen. (Diese Bedingung habe ich der Einfachheit halber etwas stärker formuliert als unbedingt nötig.)

Für Beispiele, wie eine Semantik durch die Verletzung von 7) und 8) trivialisiert wird, siehe gegebenenfalls *On inferring* (§11, S. 129f.). Es lässt sich beweisen, dass die vermöge der aufgeführten Maßnahmen *beschränkt* liberalisierte Bedingung 1) zu Kontextdefinitionen für die logischen Partikel führt, welche den jeweiligen Bestand gültiger Implikationen immer nur konservativ erweitern (a.a.O., §26).

Ich schreite nunmehr zur Definition der logischen Partikel selbst, wobei ich mich auf diejenigen beschränke, welche ausreichen, um die expressive Adäquatheit der resultierenden Semantik sicherzustellen:

$$
\begin{array}{lll}
(\rightarrow\mathrm{D}) & \Sigma \vDash \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B} \leftrightharpoons \Sigma, \mathfrak{A} \vDash \mathfrak{B} & \\
(\neg\mathrm{D}) & \Sigma \vDash \neg\mathfrak{A} \leftrightharpoons \Sigma, \mathfrak{A} \vDash \mathrm{f} & \\
(\wedge\mathrm{D}) & \Sigma \vDash \mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B} \leftrightharpoons \Sigma \vDash \mathfrak{A};\, \Sigma \vDash \mathfrak{B} & \\
(\&\mathrm{D}) & \Sigma, \mathfrak{A} \& \mathfrak{B} \vDash \mathfrak{C} \leftrightharpoons \Sigma, \mathfrak{A}, \mathfrak{B} \vDash \mathfrak{C} & \\
(\vee\mathrm{D}) & \Sigma, \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B} \vDash \mathfrak{C} \leftrightharpoons \Sigma, \mathfrak{A} \vDash \mathfrak{C};\, \Sigma, \mathfrak{B} \vDash \mathfrak{C} & \\
(\bigwedge\mathrm{D}) & \Sigma \vDash \bigwedge\mathfrak{x}\mathfrak{A}\mathfrak{c}/\mathfrak{x} \leftrightharpoons \Sigma \vDash \mathfrak{A} & |\mathrm{F}\mathfrak{c}\mathfrak{x}\mathfrak{A},\ \mathrm{N}\mathfrak{c}\Sigma \\
(\bigvee\mathrm{D}) & \Sigma, \bigvee\mathfrak{x}\mathfrak{A}\mathfrak{c}/\mathfrak{x} \vDash \mathfrak{C} \leftrightharpoons \Sigma, \mathfrak{A} \vDash \mathfrak{C} & |\mathrm{F}\mathfrak{c}\mathfrak{x}\mathfrak{A},\ \mathrm{N}\mathfrak{c}\Sigma,\ \mathrm{N}\mathfrak{c}\mathfrak{C}
\end{array}
$$

Damit ist die Semantik S($\underline{\mathrm{R}3}$) für die Logik $\underline{\mathrm{R}3}$ erreicht. Ich werde im Folgenden die in ihr definierten logischen Partikel (in der Reihenfolge ihrer Definition) kurz separat besprechen und dabei insbesondere auf die wichtigsten Abweichungen mit Blick auf ihr Verhalten in Standardlogiken eingehen (eine ausführliche Besprechung *aller* einschlägiger Abweichungen findet sich in *On inferring*, §13-§21).

Subjunktion: Die durch die Kontextdefinition ($\rightarrow$D) des Subjunktors stipulierte Doppelregel entspricht der sogenannten *Deduktionsäquivalenz*, deren Bestandteile (von rechts nach links) *Deduktionstheorem* und (von links nach rechts) *Residuation* heißen. Eine Aussage »Wenn *A* dann *B*« ist demnach (auf einem Hintergrundwissen Σ) genau dann wahr, wenn sich *B* unter Rekurs auf *A* begründen lässt. Das entspricht, von idiomatischen Abweichungen (etwa »Wenn er den Job bekommt, dann fresse ich einen Besen«) abgesehen, passgenau der Bedeutung von »wenn-dann« in lebensweltlichen wie wissenschaftlichen Argumentationszusammenhängen. Man beachte, dass die Deduktionsäquivalenz auch (und gerade) von Standardlogikern nicht bestritten wird. Nur wird sie in Standardlogiken durch Verdünnung auf empfindliche Weise gestört, wie man an folgender semantischer Produktion sieht:

1) $\mathfrak{B} \vDash \mathfrak{B}$	|(Selbstimplikation)
2) $\mathfrak{B},\mathfrak{A} \vDash \mathfrak{B}$	|(Verdünnung) 1
3) $\mathfrak{B} \vDash \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$	|($\rightarrow$D) 2

Ich hatte in Artikel (5) behauptet, dass die Kontextdefinitionen der logischen Partikel ausreichen, um die zugehörigen Rechts- und Linksregeln üblicher Sequenzenkalküle als gültig auszuweisen. Ich werde dies hier nur beispielhaft anhand des Subjunktors vorführen. Da das Deduktionstheorem unmittelbar ($\rightarrow$R) entspricht, muss in S($\underline{\text{R3}}$) nur noch ($\rightarrow$L) als gültig ausgewiesen werden. Dies geschieht dadurch, dass man die Regelantezedentien von ($\rightarrow$L) annimmt und relativ zu diesen Annahmen das Regelsukzedens in S($\underline{\text{R3}}$) semantisch produziert:

1) $\Sigma \vDash \mathfrak{A}$	|Annahme
2) $\Pi,\mathfrak{B} \vDash \mathfrak{C}$	|Annahme
3) $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B} \vDash \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$	|(Selbstimplikation)
4) $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B},\mathfrak{A} \vDash \mathfrak{B}$	|($\rightarrow$D) 3
5) $\mathfrak{B},\Pi \vDash \mathfrak{C}$	|(Vertauschung) 2
6) $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B},\mathfrak{A},\Pi \vDash \mathfrak{C}$	|(Schnitt) 4,5
7) $\mathfrak{A},\Pi,\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B} \vDash \mathfrak{C}$	|(Vertauschung) 6
8) $\Sigma,\Pi,\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B} \vDash \mathfrak{C}$	|(Schnitt) 1,7

Der Nachweis der Korrektheit der Deduktionsregeln sequenzenlogischer Kalküle ist mit Blick auf unsere Semantik selbstverständlich besonders einfach, da die Regeln von Sequenzenkalkülen den semantischen Regeln bereits syntaktisch entsprechen. Vollständigkeitsnachweise sind demgegenüber nur insofern schwieriger, als Sequenzenkalküle die Schnittregel meist nicht explizit enthalten, sodass der Vollständigkeitsbeweis in diesen Fällen den Beweis der Zulässigkeit von Schnitt (»Gentzens Hauptsatz«) einschließt. Korrektheits- und Vollständigkeitsbeweise für Kalküle des Natürlichen Schließens gestalten sich etwas aufwendiger, da man zunächst semantische Entsprechungen nicht nur für die Einführungs- und Beseitigungsregeln formulieren muss, sondern vor allem auch für die oft impliziten Rahmenregeln, hinter welchen sich Strukturregeln »verstecken«. Korrektheits- und Vollständigkeitsnachweise für axiomatische Kalküle vom Hilbert-Typ sind am einfachsten durch Äquivalenzbeweise zu schon vorgängig als korrekt und vollständig ausgewiesenen Kalkülen des Natürlichen Schließens zu führen.

Negation: Die Kontextdefinition ($\neg$D) des Negators sagt uns, dass eine Aussage (auf einem Hintergrundwissen Σ) genau dann falsch ist, wenn sie (auf dem betreffenden Hintergrund) etwas Falsches impliziert. Über die Möglichkeit, die Falschheit von Elementaraussagen (auch sprachlich) festzustellen, muss (und kann) selbstverständlich bereits vor der Definition des Negators verfügt werden – ($\neg$D) dehnt die Verwendung von »nicht« also letztlich nur rekursiv von elementaren auf beliebig komplexe Aussagen aus. Man beachte, dass gleichwohl bereits falsche Elementaraussagen die Definition erfüllen, da jede Aussage sich selbst impliziert.

An der folgenden semantischen Produktion können wir sehen, wie das Zusammenspiel von Negator und Subjunktor in Standardlogiken durch Verdünnung empfindlich gestört wird:

1) $\neg\mathfrak{A} \models \neg\mathfrak{A}$	|(Selbstimplikation)
2) $\neg\mathfrak{A},\mathfrak{A} \models \mathrm{f}$	|($\neg$D) 1
3) $\neg\mathfrak{A},\mathfrak{A},\neg\mathfrak{B} \models \mathrm{f}$	|(Verdünnung) 2
4) $\neg\mathfrak{A},\mathfrak{A} \models \neg\neg\mathfrak{B}$	|($\neg$D) 3
5) $\neg\mathfrak{A},\mathfrak{A} \models \mathfrak{B}$	|(DNA) 4
6) $\neg\mathfrak{A} \models \mathfrak{A}\rightarrow\mathfrak{B}$	|($\rightarrow$D) 5

In Zeile 3 wird über Verdünnung eine beliebige negierte Formel $\neg\mathfrak{B}$ eingeführt, die dann in Zeile 4 über ($\neg$D) für die Konklusion von 3 »verantwortlich« gemacht wird, obwohl sie an deren Herleitung gar keinen Anteil hatte. Zeile 5 wendet klassisches DNA an und es resultiert EFQ (»Aus Falschem folgt Beliebiges«) – die Implikation, die für die meisten Scheinprobleme logischer Analyse direkt verantwortlich zeichnet. Dass dabei keineswegs DNA, sondern Verdünnung entscheidend ist, sehen wir daran, dass man ohne DNA (in leichter Abwandlung der ersten vier Zeilen) Folgendes erhält:

1) $\neg\mathfrak{A} \models \neg\mathfrak{A}$	|(Selbstimplikation)
2) $\neg\mathfrak{A},\mathfrak{A} \models \mathrm{f}$	|($\neg$D) 1
3) $\neg\mathfrak{A},\mathfrak{A},\mathfrak{B} \models \mathrm{f}$	|(Verdünnung) 2
4) $\neg\mathfrak{A},\mathfrak{A} \models \neg\mathfrak{B}$	|($\neg$D) 3

Zeile 4 ist EFQN (»Ex-Falso-Quodlibet-Negatum«), die kleine Schwester von EFQ, mit gleichermaßen verheerenden Konsequenzen.

Um zu zeigen, dass wir uns mit S($\underline{\mathrm{R}3}$) auf der sicheren Seite befinden, reicht der Nachweis, dass Verdünnung EFQN zur Folge hat, freilich nicht aus. Wir müssen zudem zeigen, dass die *Absenz* von Verdünnung EFQN *verhindert*. Dass EFQN in S($\underline{\mathrm{R}3}$) in der Tat ungültig ist (und damit automatisch auch

EFQ), sieht man folgendermaßen: Mit EFQN gälte auch jede seiner Instanzen – etwa der Sonderfall $\neg f, f \vDash \neg\mathfrak{B}$. Damit zeigen wir zunächst:

1) $\neg f, f \vDash \neg\mathfrak{B}$	|(EFQN)
2) $f \vDash f$	|(Selbstimplikation)
3) $\vDash \neg f$	|($\neg$D) 2
4) $f \vDash \neg\mathfrak{B}$	|(Schnitt) 3,1
5) $f, \mathfrak{B} \vDash f$	|($\neg$D) 4

Mit EFQN gälte in S($\underline{R3}$) also auch das Implikationsschema $f, \mathfrak{B} \vDash f$. Dieses enthält keinerlei logische Partikel, gilt aber *nicht* in S($\vDash$), wo (wie man sich leicht überzeugt) nur Instanzen von Selbstimplikation als gültig ausweisbar sind. Da S($\vDash$) durch die Kontextdefinitionen der Partikel aber nur *konservativ* erweitert wird, kann $f, \mathfrak{B} \vDash f$ (und damit EFQN) auch in S($\underline{R3}$) nicht gültig sein. Dass dasselbe dann auch auf EQV (»Ex-Quodlibet-Verum«) zutreffen muss, möge man sich nun selbst überlegen (etwa anhand einer Betrachtung der EQV-Instanz $\mathfrak{B} \vDash \neg\mathfrak{A} \rightarrow \neg\mathfrak{A}$).

Die Ungültigkeit von EQV, EFQ und EFQN in der Logik $\underline{R3}$ bedeutet, dass $\underline{R3}$ in einem strengen Sinne *parakonsistent* ist, das heißt, inkonsistente Theorien durch diese Logik nicht trivialisiert werden. Dass dies mit Blick auf die Anwendung in den Wissenschaften von ausgesprochenem Nutzen ist, dürfte offensichtlich sein (für Näheres siehe etwa *On inferring*, §4).

Auch wenn DNA zumindest unter Relevanzgesichtspunkten unschädlich ist, erweist sich diese Regel ebenfalls als bezüglich S($\underline{R3}$) ungültig. Die Definition ($\neg$D) ergibt nur eine konstruktive Negation. Die naheliegende Frage, ob sich auf S($\vDash$) auch ein klassischer Negator definieren ließe, muss verneint werden. Betrachten wir diesbezüglich etwa folgenden Vorschlag: Man definiere zunächst neben »$\neg$« noch einen einstelligen Junktor »-«

(-D) $\Sigma, \text{-}\mathfrak{A} \vDash f \leftrightharpoons \Sigma \vDash \mathfrak{A}$

und »abstrahiere« dann in einem zweiten Schritt vom Unterschied zwischen »-« und »$\neg$«, indem man anstelle von »-$\mathfrak{A}$« und »$\neg\mathfrak{A}$« jeweils immer »$\sim\mathfrak{A}$« schreibt. Das neue Zeichen »~« entspricht in seinem Verhalten exakt dem klassischen Negator. Aber die »Definition« (-D) verletzt die an Kontextdefinitionen zu stellende Bedingung 1): Neben dem zu definierenden Symbol, dem Kontextsymbol sowie den allfälligen Variablen und Hilfszeichen taucht im Definiendum ein *weiteres* Zeichen auf, nämlich die propositionale Konstante f. Dass es sich bei der dies verbietenden Einschränkung keineswegs um eine bloße Willkürmaßnahme zur vorgreiflichen Verhinderung von DNA handelte, zeigt sich wie folgt: In einer Definition soll die Bedeutung des Definiens die Bedeutung des Definiendums festlegen. Daher müssen die Bedeutungen der Definienda über den Bedeutungen der Definientes *supervenieren*, was heißt, dass sich die Bedeutung eines *definierten* Ausdruck nur ändern darf, wenn die Bedeutung (mindestens) eines *definierenden* Ausdrucks abgeändert wird. Genau dies erweist sich aber als in (-D) verletzt: Die Bedeutung des Junktors »-« kann sich einer radikalen Änderung unterziehen, *obwohl* das Definiens gleich bleibt. Das liegt eben daran, dass im Definiendum neben dem zu definierenden Junktor »-« der zusätzliche Ausdruck »f« auftaucht, der bereits eine feste Bedeutung besitzt (»eine falsche Aussage«), ohne dabei aber die Rolle eines Kontextsymbols einzunehmen (wozu er auch im Definiens vorkommen müsste). Würden wir »f« durch eine Formelvariable oder irgendeine konkrete Aussage – sagen wir »1+1=2« – ersetzen, so würde sich die Bedeutung von »-« ganz erheblich verändern, ohne dass sich die Bedeutung des Definiens verändert hätte. Aus einer etwas anderen Perspektive lässt sich die Sache auch so darstellen: Die Definition (-D) ist kreativ, da sie nicht einfach nur einen neuen Junktor »-« einführt, sondern dabei zugleich stillschweigend die Bedeutung von »f« *erweitert*.

Konjunktion: Eine Besonderheit der Logik $\underline{\text{R3}}$ besteht darin, dass sie mit (∧D) und (&D) gleich zwei Partikel definiert, die sich im Deutschen mit »und« wiedergeben lassen. Auf dem Hintergrund, dass »und« in der natürlichen Sprache ohnehin in durchaus verschiedenen Bedeutungen verwendet wird, ist das vielleicht gar nicht so überraschend – man denke etwa an das zeitliche »und« (»Die Regierung trat zurück und es gab Neuwahlen«) oder an »und« im Sinne des Bestehens einer symmetrischen Relation (»Kain und Abel sind Brüder«). Der Unterschied zwischen den logischen Partikeln »∧« und »&« zeigt sich in der natürlichen Sprache in Aussagen wie

»9 ist ungerade und 11 ist prim.«
»Sowohl die Lebenshaltungskosten sind gestiegen, als auch die Arbeitslosenzahl.«
»London ist eine Stadt und der Mond ist rund.«
»Tante Erna besucht ihre Nichte Gertrud, und Kraft ist gleich Masse mal Beschleunigung.«

Man könnte fast sagen, dass auch zwischen zwei mit »und« verbundenen Teilaussagen eine Beziehung der »Relevanz« bestehen kann. In diesem Sinne drücken die ersten beiden Beispielsätze *Konjunktionen* aus, die letzten beiden nicht. Der Unterschied ist genauer dieser: In einer Konjunktion sind die beiden Konjungate füreinander insofern von Relevanz, als sie aus einem gemeinsamen Hintergrundwissen folgen, das in aller Regel durch einen zusammenhängenden Gegenstandsbereich gekennzeichnet ist. So gehören etwa die Konjungate der ersten Konjunktion beide der *Arithmetik* an. Die zweite Aussage beansprucht eine Konjunktion zu sein, insoweit sie nahe legt, dass wir es hier mit *einer gesamtgesellschaftlichen Situation* zu tun haben, die für beide Phänomene gleichermaßen verantwortlich ist. Demgegenüber nenne ich eine Aussage, in welcher der Ausdruck »und« zwei aus unterschiedlichen Zusammenhängen stammende Aussagen miteinander verbindet, eine *Konposition* – eine bloße »Zusammenstellung«. Die dritte und die vierte Beispielaussage stellen Konpositionen in diesem Sinne dar. Der logische Witz der Unterscheidung zwischen Konjunktion und Konposition ist nun, dass aus einer Konposition als Prämisse nur solche Konklusionen folgen, zu deren Herleitung die beiden Konpositionsglieder *gemeinsam* benutzt werden können. Sonst folgt die betreffende Aussage bestenfalls aus einem der beiden Konpositionsglieder, nicht aber aus der Konposition selbst. Damit entspricht der Konpositor als objektsprachlicher Junktor dem metasprachlichen Komma der Prämissenzusammenstellung (und seine Definition zeigt dies ja auch deutlich genug). Das hat unter anderem zur Folge, dass das Definiens der allfälligen expliziten Bisubjunktordefinition

$$\mathfrak{A}\leftrightarrow\mathfrak{B} \leftrightharpoons (\mathfrak{A}\rightarrow\mathfrak{B})\wedge(\mathfrak{B}\rightarrow\mathfrak{A})$$

als *Konjunktion* zu konzipieren ist, soll eine Bisubjunktion unbesehen ihre beiden Subjunktionen implizieren.

In der formalen Logik sind Konjunktor und Konpositor über ihre Kontextdefinitionen scharf unterschieden. Andererseits können wir mit »und« gebildete natürlichsprachliche Aussagen keineswegs schon anhand eines rein formalen Kriteriums daraufhin prüfen, ob es sich bei ihnen um Konjunktionen oder um Konpositionen handelt. Dies hängt vielmehr davon ab, was wir mit Blick auf unsere je einschlägigen Zwecke gegebenenfalls als »gemeinsamen Hintergrund« für die beiden Teilaussagen *ansehen würden*.

Daraus folgt zum einen, dass beim Formalisieren *inhaltliche* Gründe und Zusammenhänge über die Frage »Konposition oder Konjunktion?« entscheiden. Das ist kein Mangel, da die Kunst des Formalisierens als Schnittstelle zwischen formaler Logik und den auf formale Gültigkeit zu prüfenden Argumenten einer gegebenen Sprache ohnehin nicht rein algorithmisch-formal betrieben werden kann. Vielmehr setzt jede gelungene Formalisierung ein adäquates inhaltliches Verständnis der zu formalisierenden Aussagen voraus (man denke hier nur an Beispielpaare wie »Kain und Abel sind Brüder« und »Schopenhauer und Hegel sind Philosophen«).

Zum zweiten folgt (in Umkehrung des weiter oben konstatierten Sachverhaltes), dass das metasprachliche Komma der Prämissenzusammenstellung in der formalen Logik zwingend dem objektsprachlichen »und« der Konposition entsprechen muss, da eine konjunktiv verstandene Prämissenzusammenfassung nie rein formal gerechtfertigt werden könnte, sondern immer nur unter zusätzlicher Heranziehung inhaltlicher Gesichtspunkte. Ich erwähne das deshalb, weil es in der relevanzlogischen Literatur Versuche gegeben hat, zwischen zwei Sorten von Prämissenzusammenstellung zu unterscheiden, von welchen die *eine* (»extensionale«) Verdünnung erlauben sollte, die *andere* (»intensionale«) hingegen nicht. Dieser Ansatz ist von Grund auf verfehlt und zeitigt desaströse Folgen, auf die ich hier allerdings aus Platzgründen nicht eingehen kann. (Für eine ausführliche Besprechung der Problematik siehe aber gegebenenfalls *On inferring*, §20.)

Man könnte sich fragen, ob die Möglichkeit, mit »und« verbundene Inhalte zweckabhängig entweder als Konjunktionen oder aber als Konpositionen zu deuten, ein Einfallstor für irrelevante Schlussfolgerungen darstellt. In diesem Zusammenhang mag die folgende an Verdünnung erinnernde Eigenschaft der Konjunktion eine Rolle spielen:

$$\Sigma,\mathfrak{A} \models \mathfrak{C} \Rightarrow \Sigma,\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B} \models \mathfrak{C}$$

Gestattet die formale Option, ein Argument mit mehreren Prämissen als Argument mit nur einer einzigen Prämisse – der Konjunktion der ursprünglichen Prämissen – zu deuten, ein Unterlaufen der Ungültigkeit von Verdünnung? Dass eine solche Befürchtung unbegründet ist, lässt sich am Beispiel der formalen Evaluation einer Argumentation wie der folgenden nachvollziehen:

»Die Anzahl der Planeten ist 8, und wenn 8 gerade ist, dann ist 9 ungerade. *Also* ist, wenn 8 gerade ist, sowohl 9 ungerade als auch die Anzahl der Planeten 8. *Folglich* gilt: Wenn 8 gerade ist, dann ist die Anzahl der Planeten 8.«

Die Leserin oder der Leser ist wahrscheinlich inzwischen nicht mehr überrascht zu hören, dass diese Argumentation den Gültigkeitstest in allen Standardlogiken besteht. Zugleich ist klar, dass in ihr auf grobe Weise gegen Relevanzgesichtspunkte verstoßen wird. Die Frage ist nun, ob aufgrund der Wahlmöglichkeit zwischen Konjunktion und Konposition eine Formalisierung der Argumentation möglich ist, der gemäß sie trotzdem in $\underline{\text{R3}}$ durchgeht. Um dies entscheiden zu können, bestimmen wir zunächst die Argumentationsstruktur. Wir haben es insgesamt mit drei Elementaraussagen zu tun:

A: Die Anzahl der Planeten ist 8.
B: 8 ist gerade.
C: 9 ist ungerade.

Geht man davon aus, dass das erste auftretende »und« nicht zwei Prämissen zusammenstellt, sondern zwei Teilaussagen junktoriell zu einer einzigen Prämisse verbindet, dann enthält die Argumentation insgesamt drei komplexe Aussagen, welche eine aus zwei Argumenten bestehende Argumentationskette bilden. Die Form dieser Kette sieht so aus:

$$\begin{array}{l} A*_1(B\longrightarrow C) \\ \hline B\longrightarrow(C*_2A) \\ \hline B\longrightarrow A \end{array}$$

Die Junktorenvariablen $*_1$ und $*_2$ könnten dabei wahlweise für den Konpositor oder den Konjunktor stehen. Da man in $\underline{\mathrm{R3}}$

$$\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}\vDash\mathfrak{A}\&\mathfrak{B}$$
$$\mathfrak{A}\&\mathfrak{B}\nvDash\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}$$

zu konstatieren hat, die Konjunktion also stärker ist als die Konposition, muss nur der Fall $*_1=\wedge$ untersucht werden. Kommen wir damit nicht durch die Schlusskette, so erst recht nicht mit $*_1=\&$. Wir repräsentieren also die Prämisse durch die Formel

$$A\wedge(B\longrightarrow C)$$

Bezüglich $\underline{\mathrm{R3}}$ lässt sich nun weiter konstatieren:

$$A\wedge(B\longrightarrow C)\nvDash B\longrightarrow(C\wedge A)$$
$$A\wedge(B\longrightarrow C)\vDash B\longrightarrow(C\&A)$$

Ich werde hier der Kürze halber auf die Nachweise verzichten. Grundsätzlich lässt sich die Gültigkeit einer $\underline{\mathrm{R3}}$-Implikation dadurch aufzeigen, dass man sie in $\mathrm{S}(\underline{\mathrm{R3}})$ produziert. Ungültigkeit zeigt man etwa über den

Nachweis, dass S($\underline{\mathrm{R3}}$) andernfalls keine konservative Erweiterung von S($\vDash$) oder eines der auf S($\vDash$) aufbauenden Fragmente wäre. Für R3 (also ohne Quantoren) existiert zudem ein uniformes Entscheidungsverfahren, das auch die meisten $\underline{\mathrm{R3}}$-Implikationen zu entscheiden erlaubt (siehe *On inferring*, §26).

Auf dem Hintergrund der gerade konstatierten Implikationsverhältnisse steht fest, dass das »und« der Konklusion des ersten Schlusses im Sinne einer Konposition gelesen werden muss ($*_2$=&), soll der Schluss gültig sein. (Hier habe ich mich in *On inferring*, §17, S. 188 offensichtlich vertan als ich schrieb, dass auch die zweite der beiden Implikationen ungültig sei.) Da mit Blick auf den folgenden Argumentationsschritt in $\underline{\mathrm{R3}}$ jedoch

$$B \rightarrow (C \wedge A) \vDash B \rightarrow A$$
$$B \rightarrow (C \& A) \nvDash B \rightarrow A$$

zu konstatieren ist, erweist sich der zweite Schluss nun als blockiert. Damit steht fest, dass die zu prüfende Argumentation formal ungültig ist, und zwar *ganz gleich*, durch welche Partikel der Ausdruck »und« jeweils formal wiedergegeben wird.

Adjunktion: Was den über ($\vee$D) definierten Adjunktor (bzw. Disjunktor) angeht, so repräsentiert dieser »oder« in dem Sinne, in welchem die Verwendung des Ausdrucks den Fall einschließt, dass beide Teilaussagen wahr sind. Ein Beispiel: Wenn man Kaffee *und* Tee bekommen kann, dann in diesem Sinne auch Kaffee *oder* Tee. Die stärkere Partikel »entweder-oder« lässt sich gegebenenfalls über $(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}) \wedge (\neg\mathfrak{A} \vee \neg\mathfrak{B})$ explizit definieren. Das ist auch in Standardlogiken nicht anders. Mit Bezug auf die Unterschiede ist vor allem hervorzuheben, dass sich für den relevanten Adjunktor der Disjunktive Syllogismus

$$\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}, \neg\mathfrak{A} \vDash \mathfrak{B}$$

als ungültig erweist. Das sieht man leicht daran, dass sich sonst mit der Abschwächung

$$\mathfrak{A} \vDash \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$$

und Schnitt EFQ semantisch validieren ließe. Die Ungültigkeit des Disjunktiven Syllogismus in Relevanzlogiken wird auch von aufgeschlossenen Rezipienten häufig als Schock erfahren und stellt einen der Hauptgründe für die fortdauernde Vorherrschaft von Standardsystemen dar. Schauen wir uns einmal an, welche Überlegung der Intuition zugrunde liegt, dass der Disjunktive Syllogismus eine gültige Schlussform sein müsse:

»Wenn man weiß, dass $A \vee B$ wahr ist, dann weiß man auch, dass wenigstens eine der beiden Teilaussagen, A oder B, wahr sein muss. Erfährt man nun zudem, dass $\neg A$ wahr und mithin A falsch ist, dann weiß man, dass B die wahre Teilaussage von $A \vee B$ darstellen muss.«

Ich habe nicht das Geringste einzuwenden. Nur wäre die Begründung dafür, *warum* man unter den gegebenen Bedingungen weiß, dass B die wahre Teilaussage sein muss, noch zu ergänzen um den Nachsatz »weil A nicht zugleich wahr und falsch sein kann«. Und eben das ist der springende Punkt. Dabei möchte ich keineswegs darauf hinaus, dass es so etwas wie »wahre Widersprüche« gibt, wie das die sogenannten »Dialethisten« unter den Logikern tun (siehe etwa von Graham Priest *In contradiction* aus dem Jahr 1987). Vielmehr gehe ich mit dem Mainstream völlig darin konform, dass das Prinzip vom ausgeschlossenen Widerspruch einen integralen Bestandteil der *Bedeutung* des Negators darstellt. So ist etwa auf der Ebene komplexer Aussagen die Herleitung eines Widerspruchs unsere *einzige* Rechtfertigung dafür, auf die Falschheit mindestens einer der Annahmen zu schließen, die zu dem Widerspruch geführt haben. Anders gesagt: Könnten Widersprüche wahr sein, dann wäre die Negationseinführungsregel ungültig. Da diese aber über die Definition ($\neg$D) in die Bedeutung von »$\neg$« »eingebaut« ist, kann kein Symbol »*«, welches eine friedliche Koexistenz von A und $*A$ zulässt, ein »Negator« sein. (Für eine ausführlichere Besprechung und Widerlegung des Dialethismus siehe *On inferring*, §5.)

Dass es keine »wahren Widersprüche« gibt, stellt allerdings keineswegs sicher, dass wir unsere Argumentationen immer auf konsistentem Hintergrund führen. Im Gegenteil wissen wir ganz genau, dass dies häufig nicht der Fall ist. Um nun zu erkennen, dass der Disjunktive Syllogismus nicht universell gültig sein kann, reicht es völlig aus, festzuhalten, dass die oben zu seiner Rechtfertigung vorgetragene Überlegung die Konsistenz der Argumentationsbasis unterstellt. Eine *universell* gültige Schlussform ist jedoch auch auf inkonsistentem Argumentationshintergrund im Sinne der Wahrheitsvererbung zuverlässig. Als Beispiel betrachten wir Schlüsse von $\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}$ auf $\mathfrak{B}$: Diese Schlussform beinhaltet als eine ihrer Instanzen auch den Schluss von $A \wedge \neg A$ auf A, weil die Wahrheit von A durchaus auch aus einer Aussage folgen kann, die (inkonsistenterweise) *zugleich* die Falschheit von A impliziert. Auf der anderen

Seite sieht man gerade an der Herleitung des EFQ mittels des Disjunktiven Syllogismus, *dass* und *wie* der dieser Schlussform zugrundeliegende Mechanismus im Falle inkonsistenter Argumentationsbasen versagt: Ausgehend von Annahmen $A, \neg A$ schließt man im ersten Schritt per Abschwächung von der Wahrheit von A auf die Wahrheit von $A \vee B$. Im zweiten Schritt schließt man – nunmehr ansetzend an der *Falschheit* von A – per Disjunktivem Syllogismus, dass es die Wahrheit der Aussage B gewesen sein müsse, auf der sich die im ersten Schritt erschlossene Wahrheit von $A \vee B$ gegründet hatte. Und das ist ganz offensichtlich ein Trugschluss, da man zur Wahrheit von $A \vee B$ ja über die Wahrheit von A gelangt war.

Sagt man, dass der Disjunktive Syllogismus eine ungültige Schlussform wie jede andere (etwa $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B} \models \mathfrak{A}$) darstellt, dann tut man ihm freilich Unrecht. Denn im Unterschied zu den meisten anderen ungültigen Schlussformen kann der Disjunktive Syllogismus zumindest lokale Gültigkeit für sich beanspruchen. Damit gleicht er der Schlussregel DNA, die ebenfalls nicht universell, aber doch auf wertdefiniten Diskursbereichen gültig ist. Der Disjunktive Syllogismus ist analog in der Anwendung auf Aussagen gültig, die aus miteinander logisch verträglichen Annahmenmengen resultieren. Man darf ihn also immer dann bedenkenlos anwenden, wenn die Konsistenz des Argumentationshintergrundes gesichert ist, und man darf ihn zumindest unter Vorbehalt anwenden, wenn die Konsistenz zwar nicht gezeigt ist, aber doch mit guten Gründen unterstellt werden kann. Dabei verdient ein Anwendungsbereich besondere Erwähnung: In S($\underline{\text{R3}}$) ist nämlich die Regel

$$\models \neg\mathfrak{A};\ \models \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B} \Rightarrow\ \models \mathfrak{B}$$

zulässig. Das heißt aber nichts anderes, als dass der Disjunktive Syllogismus auf der *Metaebene* des Schließens von logischen Wahrheiten auf logische Wahrheiten eine lokal gültige Schlussregel darstellt.

Da wir es in $\underline{\text{R3}}$ schon mit zwei verschiedenen Bedeutungen von »und« zu tun haben, kann man sich fragen, ob dem nicht auch zwei verschiedene Bedeutungen von »oder« entsprechen müssten. Das ist in der Tat der Fall: Neben dem gerade besprochenen »extensionalen« Adjunktor kann man auch einen »intensionalen« Adjunktor definieren, dessen Bedeutung gerade so angelegt ist, dass für ihn der Disjunktive Syllogismus gilt. Es handelt sich also um Aussagen »A oder B«, die von vornherein im Sinne von »Wenn nicht A, dann B« und »Wenn nicht B, dann A« *gemeint* sind. Dass ich diesen Adjunktor oben nicht mit aufgeführt habe, liegt daran, dass er sich explizit definieren lässt:

(oD) $\mathfrak{A}\mathrm{o}\mathfrak{B} \leftrightharpoons (\neg\mathfrak{A}\rightarrow\mathfrak{B})\wedge(\neg\mathfrak{B}\rightarrow\mathfrak{A})$

Es gilt dann

$\mathfrak{A}\mathrm{o}\mathfrak{B},\neg\mathfrak{A}\vDash\mathfrak{B}$

Es scheint, dass die Intuition, dass der Disjunktive Syllogismus gelten muss, auch damit zu tun hat, dass man sich unwillkürlich intensionale Adjunktionen vor Augen ruft. Dass die intensionale Adjunktion trotz Disjunktivem Syllogismus nicht EFQ lizensiert, hat den Grund, dass für sie (im Unterschied zur extensionalen Adjunktion) Abschwächung unzulässig ist:

$\mathfrak{A}\nvDash\mathfrak{A}\mathrm{o}\mathfrak{B}$

Dem entsprechen diskursive Interaktionen wie die folgende:

A: »Meine Nase juckt.«
B: »Also juckt deine Nase *oder* ich gewinne morgen im Lotto. Hm … wie wär's, wenn Du etwas Salbe drauf machst?«
A: »Das ist doch Blödsinn … würde meine Nase nicht jucken, wäre das doch keine Garantie dafür, dass du morgen im Lotto gewinnst!«

A's Reaktion zeigt hier keineswegs Unkenntnis logischer Zusammenhänge, sondern merkt vielmehr implizit den Umstand an, dass B die von ihm zunächst extensional eingeführte Adjunktion plötzlich intensional aufzufassen beginnt.

Quantifikation: Über die beiden Quantoren mit den Kontextdefinitionen ($\bigwedge$D) und ($\bigvee$D) gibt es nicht viel zu sagen. Die einschränkenden Bedingungen $F\mathfrak{c}\mathfrak{x}\mathfrak{A}$ (»$\mathfrak{c}$ ist frei für $\mathfrak{x}$ in $\mathfrak{A}$«), $N\mathfrak{c}\Sigma$ (»$\mathfrak{c}$ kommt in Σ nicht vor«) und $N\mathfrak{c}\mathfrak{C}$ (»$\mathfrak{c}$ kommt in $\mathfrak{C}$ nicht vor«) finden sich auch in Standardlogiken. Die erste Bedingung stellt beim Übergang vom Definiens auf das Definiendum nur sicher, dass die gewählte Variable nicht schon in den Bereich eines anderen Quantors fällt, der sie bindet (man nimmt am besten einfach eine neue). Die anderen beiden Bedingungen gewährleisten beim Übergang vom Definiens auf das Definiendum, dass die bei der Quantifikation verschwindende Konstante »beliebig« war.

De Morgan- und *Distributionsregeln*: Mit der aufgrund der konstruktiven Negation erwartbaren Ausnahme

$\neg(\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B})\not\models\neg\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{B}$

gelten in S(R3) alle De Morgan-Implikationen. Darüber hinaus gelten alle Distributionsregeln bis auf Distribution des Konjunktors über den Adjunktor (und die quantorenlogischen Entsprechungen). Das heißt, wir konstatieren

$\mathfrak{A}\wedge(\mathfrak{B}\vee\mathfrak{C})\not\models(\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B})\vee(\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{C})$
$\mathfrak{A}\wedge\bigvee\mathfrak{x}\mathfrak{B}\not\models\bigvee\mathfrak{x}(\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B})$
$\bigwedge\mathfrak{x}(\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B})\not\models\mathfrak{A}\vee\bigwedge\mathfrak{x}\mathfrak{B}$

Neben der Ungültigkeit des Disjunktiven Syllogismus dürfte dies ein weiteres wichtiges Resultat darstellen, welches Skepsis veranlassen könnte. Ich möchte die Diskussion hier kurzhalten (siehe gegebenenfalls *On inferring*, §20). Zunächst gebe ich zu bedenken, dass es durchaus Gründe geben mag, diese Resultate zu *begrüßen*. So war es etwa gerade die Distribution der Konjunktion über die Adjunktion, welche im Zusammenhang der Debatte über »Quantenlogiken« (zur Vermeidung paradoxer Theoreme in der Quantenmechanik) in Zweifel gezogen wurde. Die verallgemeinerte Version mit dem Allquantor anstelle des Konjunktors erweist sich darüber hinaus auch im Rahmen der Intuitionistischen Logik als ungültig. Und schließlich könnte unsere starke Gültigkeitsintuition hinsichtlich Distribution auch damit zu tun haben, dass wir dabei unwillkürlich an die Distribution der *Konposition* über die Adjunktion denken. Denn in der Tat gilt in S(R3):

$\mathfrak{A}\&(\mathfrak{B}\vee\mathfrak{C})\models(\mathfrak{A}\&\mathfrak{B})\vee(\mathfrak{A}\&\mathfrak{C})$
$\mathfrak{A}\&\bigvee\mathfrak{x}\mathfrak{B}\models\bigvee\mathfrak{x}(\mathfrak{A}\&\mathfrak{B})$

Möchte man gleichwohl darüber hinaus auch die Distribution der Konjunktion über die Adjunktion (inklusive der quantorenlogischen Varianten) gestatten, so kann man die betreffenden Implikationen als *Bedeutungspostulate* zur Semantik S(R3) hinzunehmen. Tut man das, dann betrachtet man Kontextdefinitionen als vom Status her zwischen expliziten Definitionen und exemplarischen Einführungen von Ausdrücken stehend: Während es nicht nur überhaupt kein Problem darstellt, sondern vielmehr sogar erwünscht ist, mittels exemplarischer Einführung von Ausdrücken etablierte semantische Regeln um weitere zu ergänzen, die das Verhältnis der betreffenden Ausdrücke semantisch näher bestimmen, dürfen durch explizite Definition eingeführte Ausdrücke keinesfalls über weitere Regeln semantisch »näher bestimmt werden«: Die Bedeutung des Definiendums ist hier vielmehr als vollständig durch die Bedeutung des Definiens gegeben zu betrachten.

Die Hinzunahme der drei Distributionspostulate ergibt die Semantik S($\underline{\mathrm{R4}}$) für die Logik $\underline{\mathrm{R4}}$. Für die Junktorenlogik R4 benötigt man übrigens nur die »abgeschnittene« Fassung

$$\mathfrak{A}\wedge(\mathfrak{B}\vee\mathfrak{C})\vDash(\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B})\vee\mathfrak{C}$$

Es lässt sich zeigen, dass die betreffenden Postulate die Logik $\underline{\mathrm{R3}}$ immerhin noch »schwach konservativ« erweitern. Damit ist gemeint, dass die Postulate tatsächlich nur die *Interaktion der in ihnen auftretenden logischen Partikel* affizieren und ansonsten alles beim Alten lassen. Diese Mindestforderung an Bedeutungspostulate für bereits durch Kontextdefinition eingeführte logische Partikel schränkt die Menge der Kandidaten für solche Postulate ganz beträchtlich ein. Gleichwohl ist die Erfüllung der Forderung für sich genommen noch keineswegs hinreichend, um ein entsprechendes Bedeutungspostulat zu rechtfertigen. Vielmehr ist in jedem Fall zu berücksichtigen, dass ein Bedeutungspostulat dem lebensweltlichen und wissenschaftlichen Gebrauch des in Frage stehenden Ausdrucks Rechnung tragen muss. Distribution der Konjunktion über die Adjunktion scheint dies immerhin zu tun. Der wesentliche Unterschied zwischen S($\underline{\mathrm{R3}}$) und S($\underline{\mathrm{R4}}$) liegt am Ende in folgendem Umstand: In S($\underline{\mathrm{R3}}$) geht die Bedeutung der logischen Partikel in der Bedeutung von »$\vDash$« vollständig auf. Dass durch Kontextdefinitionen eingeführte Ausdrücke nur partiell eliminiert werden können, steht dem nicht entgegen, da die Partikeldefinitionen hinreichen, die Verwendung von logisch komplexen Aussagen für *alle* Kontexte zu regeln. In S($\underline{\mathrm{R4}}$) geht die Bedeutung der Partikel hingegen nicht mehr völlig im Begriff des gültigen Schlusses auf. Die $\vDash$-Regeln bilden hier nur den (wenn auch engen) Rahmen, innerhalb dessen die Bedeutung der durch Kontextdefinition eingeführten Partikel über semantische Postulate gegebenenfalls weiter artikuliert werden kann.

Wendet man die Logik $\underline{\mathrm{R4}}$ in wertdefiniten Diskursbereichen an, dann darf man sie um die Regel DNA ergänzen und erhält so die bekannte Relevanzlogik R von Alan Ross Anderson und Nuel D. Belnap – siehe *Entailment. The logic of relevance and necessity* (Volume I) von 1975. Auf dem Hintergrund konsistenter Prämissen bzw. Annahmen wird zudem der Disjunktive Syllogismus zulässig. Bewegt man sich in wertdefiniten Diskursbereichen *und* argumentiert auf dem Hintergrund konsistenter Prämissen und Annahmen, dann wird (lokal) eine ziemlich weitgehende Annäherung an den Schlussregelbestand der Klassischen Logik erreicht.

Ich hatte im Verlauf dieses Paragrafen hervorgehoben, dass Regelsemantiken vornehmlich der Explikation des Begriffs des gültigen Schlusses, der Definition der logischen Partikel, der Feststellung der Gültigkeit und Ungültigkeit von Schlussformen, sowie schließlich dem Nachweis der Korrektheit und Vollständigkeit von Logikkalkülen dienen. Zum argumentativen Schließen *selbst* sind Regelsemantiken aufgrund ihrer Metastufigkeit hingegen nicht geeignet – hier kommen vielmehr Kalküle des Natürlichen Schließens zu ihrem Recht. Mit Bezug auf die Semantiken S($\underline{\mathrm{R3}}$) und S($\underline{\mathrm{R4}}$) vollständige und korrekte Kalküle Natürlichen Schließens N($\underline{\mathrm{R3}}$) und N($\underline{\mathrm{R4}}$) habe ich in *On inferring* aufgestellt. Interessierte Leserinnen und Leser finden alles Weitere dort.